TRATADO

DE

ARITHMETICA

pelo

Dr. João Antonio Coqueiro

AO SENHOR DOUTOR

FRANCISCO DE MELLO COUTINHO DE VILHENA

ILLUSTRE ADVOGADO DO BRASIL

FIDALGO CAVALLEIRO DA CASA IMPERIAL

ETC., ETC., ETC.

Testemunho do mais sincero reconhecimento e amizade.

J. A. COQUEIRO.

ADVERTENCIA

Durante algum tempo empregavamos muitas vezes nossas horas vagas em reflectir sobre as differentes theorias importantes da Arithmetica, e em redigil-as segundo nossa maneira de ver, porém isto não com o fim de publicarmos um livro.

Um dos nossos amigos e collegas o Senhor Dr C. C. Cantanhede, membro da Sociedade chimica de Paris, vendo algumas d'essas redacções esparsas, aconselhou-nos sua coordinação; hoje, coadjuvados pela provincia do Maranhão, a quem sômos extremamente gratos, cedemos ao voto d'aquelle amigo, dando ao prelo este nosso primeiro trabalho scientifico, que esperamos será de alguma utilidade á mocidade Brasileira.

O nosso fim foi sempre apresentar a sciencia de uma maneira rigorosa e ao mesmo tempo clara; de modo que, aquelle que seguisse cuidadosamente nossas lições, podesse com segurança emprehender o estudo das outras partes mais elevadas das sciencias mathematicas.

O indice das materias mostrará perfeitamente a marcha que seguimos, marcha que nos pareceo mais racional. No Livro VI tratamos da theoria das approximações numericas, theoria tão importante que sem ella seria impossivel

resolver-se um grande numero de problemas, que se apresentão sobretudo nas sciencias de observação ; esforçamo-nos por expol-a com a maior clareza possivel, applicando sempre a theoria á alguns exemplos, tomados na Geometria e na Physica.

Cada livro se acha subdividido em capitulos ; damos no fim de cada capitulo certo numero de problemas, alguns dos quaes se achão resolvidos, como applicação das materias alli tratadas ; outros, relativos á theoria dos numeros, serão difficeis aos estudantes do primeiro anno, mas uteis, como exercicios, aos do segundo.

Aproveitamos esta occasião para agradecermos a Mrs P. Renoux e L. Tarbouriech, distinctos professores de sciencias em Paris, o trabalho que tomarão com a leitura do manuscripto de nossa obra, e os juizos que fizerão d'ella, juizos que forão publicados em alguns jornaes do Maranhão.

INDICE DAS MATERIAS

LIVRO PRIMEIRO.

Numeração. — Operações fundamentaes.

Paginas.

CAPITULO PRIMEIRO. — Numeração. 1
CAP. II. — Addição. — Subtracção 14
CAP. III. — Multiplicação 25
CAP. IV. — Divisão 38

LIVRO II.

Propriedades elementares dos numeros inteiros.

CAPITULO PRIMEIRO. — Theoremas relativos ás operações — Potencias — Theoremas relativos ás potencias 55
CAP. II. — Theoria dos multiplos — Theoria do restos — Divisibilidade — Provas 73
CAP. III. — Theoria do maior divisor commum — Theoria do menor multiplo commum 90
CAP. IV. — Theoria dos numeros primos — Composição do maior divisor commum — Composição do menor multiplo commum. 106

LIVRO III.

Theoria das fracções ordinarias. — Theoria dos numeros decimaes.

CAPITULO PRIMEIRO. — Propriedades das fracções ordinarias 127
CAP. II. — Operações sobre as fracções ordinarias 147
CAP. III. — Theoria dos numeros decimaes. 169

LIVRO IV.

Medidas.

Paginas.

Capitulo primeiro. — Systema metrico. 191

Cap. II. — Systema brasileiro de pesos e medidas — Numeros complexos — Comparação entre os systemas francez e brasileiro 201

LIVRO V.

Potencias e Raizes.

Capitulo primeiro. — Quadrado — Raiz quadrada 215

Cap. II. — Cubo — Raiz cubica 235

Cap. III. — Numeros incommensuraveis 247

LIVRO VI.

Approximações numericas.

Capitulo primeiro. — Operações abreviadas. 257

Cap. II. — Erros absolutos 276

Cap. III. — Erros relativos. 301

LIVRO VII.

Razões. — Progressões. — Logarithmos.

Capitulo primeiro. — Razões 311

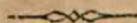
Cap. II. — Progressões 321

Cap. III. — Logarithmos. 337

LIVRO VIII.

Applicações.

Capitulo primeiro. — Applicações da theoria das razões 357

Cap. II. — Soluções de diversas questões sobre as grandezas concretas. . 371

ERRATA.

Pag.	*Linhas*	*Em lugar de*	*Leia-se*
	12 (subindo)	menor	maior
24	6 »	segundo	terceiro
32	4 »	é maior que 1000	é menor que 10000
36	2 »	esta é	e
37	15 »	76	96
37	13 »	132 — 76 ou 56	132 — 96 ou 36
57	5 »	$24\times7\times11\times9$	$24\times7\times11\times5\times9$
57	3 »	$24\times7\times11\times9$	$24\times7\times11\times5\times9$
63	2 »	$+a\times b\times c\times r''$	$+a\times b\times r''$
66	7 (descendo)	$\frac{c+m}{n}$	$\frac{c+n}{n}$
80	7 »	$m'.11+1$	$m'.11-1$
83	9 »	par	impar
83	10 »	impar	par
83	9 (subindo)	$5.1+3.3+2.2+2.1+7.3=51$	$5.1+2.3+2.2+2.1+7.3=50$
87	2 »	5603407	5503407
91	5 (descendo)	342	432
91	15 »	436	432
93	8 (subindo)	1551	1155
100	11 (descendo)	594	5940
108	10 (subindo)	menor	maior
110	3 »	3, 5, 11	3, 5, 7, 11
116	15 (descendo)	se não	não se
120	11 »	$2^4\times3^2\times5^6$	$2^2\times3^2\times5^4$
121	15 (subindo)	3^6	2^3
121	14 »	$2^3\times3^2$	$2^3\times3$
121	13 »	$3......2^5\times4^2$	$3,^3.....2^2\times3^3$
123	13 (descendo)	$d'<a$	$d'>a$
130	10 (subindo)	$6\times7+3$	$6\times7+5$
130	9 »	$\frac{6\times7+3}{7}$	$\frac{6\times7+5}{7}$
141	9 »	$\frac{10}{180}$	$\frac{72}{180}$
147	8 »	é não	não é
151	6 »	$\frac{1005}{35}$	$\frac{995}{35}$
151	5 »	$\frac{396}{35}$	$\frac{386}{35}$
155	8 »	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{9}$

Pag.	*Linhas*	*Em lugar de*	*Leia-se*
159	3 (descendo)	$7 \times \frac{2}{3}$	$7 + \frac{2}{3}$
180	4 (subindo)	$\frac{55}{10^4}$	$\frac{55}{10^2}$
196	4 (descendo)	carpinteiria	carpentaria
261	10 (subindo)	19,98	12,98
265	10 »	toma-se	tomão-se
269	13 »	pode-se	podem-se
271	8 »	pode-se	podem-se
277	12 (descendo)	A,B,C..*a*,*b*,*c*...	A,B,C...
282	9 »	$\frac{\alpha}{b} \times \frac{\alpha \times \beta}{b^2}$	$\frac{\alpha}{b} + \frac{\alpha \times \beta}{b^2}$

OBSERVAÇÕES.

Alem dos erros assignalados n'esta errata ha outros, de pouca monta, que o leitor poderá facilmente corrigir.

Ninguem ignora que a primeira edição de uma obra sahe sempre inçada de erros, sobretudo quando outras occupações não permittem ao author inexperiente uma revisão seria das provas.

A expressão — *a menos de* — de que fizemos uso na theoria das approximações, deve ser substituida esta outra — *abaixo de* — expressão clara, mathematica e muito adequada; devemol-a ao nosso mui distincto comprovinciano, o illustre author do Virgilio Brasileiro.

Empregamos frequentes vezes no curso d'esta obra a abreviatura:

o. q. e. n. d.

iniciaes das palavras:

o que era necessario demonstrar.

TRATADO DE ARITHMETICA

LIVRO I.

Numeração. — Operações fundamentaes.

—o—

CAPITULO PRIMEIRO.

NUMERAÇÃO.

Definições.

1. Chama-se *grandeza* tudo quanto é susceptivel de augmento ou diminuição, como a extensão, o tempo, o peso, o movimento, etc. Se em uma grandeza fizermos abstracção de suas qualidades sensiveis e physicas, como a côr, o bello, o util, etc.; se considerarmos pelo contrario na grandeza somente o que ha de *mensuravel*, teremos uma idéa das grandezas, que são do dominio das *Sciencias mathematicas*.

As Mathematicas são pois a Sciencia das grandezas mensuraveis.

As grandezas mathematicas são ou *continuas* ou *descontinuas*.

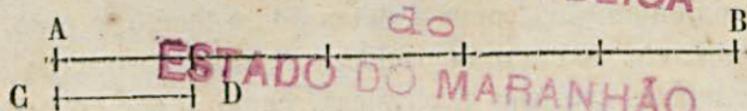
As primeiras são aquellas que podemos augmentar ou dimi-

quir por gráos tão pequenos quanto quizermos, como a *extensão*. As segundas são aquellas que não podemos augmentar, nem diminuir por gráos tão pequenos quanto quizermos, como por exemplo *um grupo de individuos*.

São estas ultimas que nos dão a idéa do *numero*; com effeito, quando vêmos uma reunião de objectos da mesma especie, como *um regimento de soldados*, *um rebanho de ovelhas*, etc., temos uma idéa do numero; a repetição de phenomenos identicos como a *successão dos dias e das noites*, *as verberações de um relogio*, etc., tambem nos trazem a idéa de numero.

Não se pode definir o que é o numero de uma maneira absoluta; toma-se por definição do numero um dos seos usos mais importante, que é a *medida das grandezas*.

2. *Medir uma grandeza*, em geral, é determinar seo valor por meio de outra grandeza da mesma especie, porém conhecida, que se chama *unidade*. Nas grandezas descontinuas a unidade *é um dos objectos separadamente*, fazendo-se abstracção de sua natureza; e a medida da grandeza é o *numero dos objectos*; assim diz-se que : *numero é a reunião de muitos objectos, ou de muitas unidades da mesma especie*. A unidade é tambem considerada como um numero.

Tambem servimo-nos dos numeros para medir as grandezas continuas. Supponhamos que se queira avaliar o comprimento da linha AB;

toma-se para isso uma outra grandeza homogenea CD, da qual se tem uma idéa exacta ; applica-se CD sobre AB tantas vezes, quantas fôr possivel ; o resultado da operação se exprime por um numero : no nosso exemplo AB contem cinco vezes CD ou cinco vezes a unidade, e o numero *cinco* é a medida da grandeza AB por meio da grandeza CD.

O numero é pois a razão da grandeza que se quer medir á

uma outra grandeza da mesma especie; tal é a definição de Newton.

3. Pode acontecer que avaliando-se uma grandeza, esta contenha exactamente um certo numero de unidades; n'este caso o numero que representa assim o valor da grandeza, é um numero *inteiro*. Porém se a grandeza contem alem de um certo numero de unidades um resto menor que a unidade escolhida, mede-se este resto, como veremos mais tarde, dividindo a unidade em muitas partes iguaes; resulta d'ahi uma outra especie de numeros, que se chamão numero *fraccionario* ou *fracção.*

4. Logo que uma grandeza é representada por um numero, toma o nome de *quantidade.*

5. Quando, enunciando-se um numero, não se designa a especie das unidades, que representa, o numero chama-se *abstracto*, e no caso contrario *concreto.*

6. *A Arithmetica é a sciencia elementar dos numeros; comprehende as operações que se podem executar sobre elles e o estudo de suas propriedades elementares.*

Numeração em geral.

7. *A numeração em geral é a arte de formar e representar todos os numeros.*

A formação dos numeros não depende dos systemas de numeração, o que já não acontece com a maneira de representl-os; um numero que é representado em um systema de um certo modo, é representado de outro em outro systema. Os differentes systemas de numeração se distinguem pela sua *base*, que mais tarde definiremos.

FORMAÇÃO DOS NUMEROS.

8. Concebamos uma grandeza igual á unidade de sua especie, o numero que lhe serve de medida é o *primeiro numero in-*

teiro; se esta quantidade fôr augmentada com uma outra quantidade igual a ella, o numero que lhe serve de medida, é o *numero inteiro seguinte*; se ainda cresce n'uma quantidade igual á unidade, o numero que lhe serve de medida, é o *numero inteiro seguinte*, e assim por diante; por conseguinte, a serie natural dos numeros é illimitada; porque por maior que seja um numero, se o augmentarmos de uma unidade, teremos um numero maior.

REPRESENTAÇÃO DOS NUMEROS.

9. Representar os numeros é enuncial-os e escrevel-os; por conseguinte em qualquer systema, a numeração se divide em numeração *fallada* e em numeração *escripta*.

Se a cada numero dessemos um nome e um signal particular para distinguil-o dos outros, seria facil ver-se que nossa memoria não poderia prestar-se a tanto, por isso que, sendo illimitada a serie dos numeros, era necessario um numero illimitado de signaes e nomes, o que traria necessariamente confusão; o fim pois de cada systema de numeração é de poder representar todos os numeros por meio de um pequeno numero de palavras e signaes. *Chama-se base de um systema de numeração, o numero de signaes empregados*. É assim, por exemplo, que se chama *binario, ternario, decimal, duodecimal*, etc., o systema, cuja base é *dous, tres, dez, doze*, etc., isto é, cujo numero de signaes empregados é dous, tres, dez, doze, etc.

Numeração decimal.

10. De todos os systemas de numeração o unico adoptado é o decimal, que vamos expôr. Este systema é superior aos binario e ternario; porque, como veremos mais tarde, dez é um numero composto de dous factores, o que offerece muita vantagem na simplificação dos calculos; o duodecimal seria pre-

ferivel ao decimal por ser a base d'aquelle um numero composto de tres factores.

NUMERAÇÃO FALLADA.

11. A numeração *fallada* é a nomenclatura dos numeros; é a parte da numeração que tem por fim exprimir todos os numeros com um pequeno numero de nomes.

No systema decimal, a pezar de ser dez o numero de signaes empregados, comtudo o numero de nomes é maior, como veremos; o que não pode deixar de ter lugar em todo e qualquer systema.

Aos primeiros numeros, obtidos como explicámos na formação dos numeros, derão-se os seguintes nomes : *um* ou *unidade simples, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove;* ajuntando a este ultimo uma unidade, obtem-se o seguinte numero, cujo nome é *dez.*

Considerou-se dez como uma nova unidade, que se chamou *dezena* e contou-se por dezenas como por unidades :

uma dezena, ou *dez*	. . . .
duas dezenaz, ou *dous des*	. . . . *vinte*
tres dezenas, ou *trez des*	. . . . *trinta*
quatro dezenas, ou *quatro dez*	. . . . *quarenta*
. . . .	nomes que o
. . . .	uso transformou
. . . .	em. . . . . .
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
nove dezenas, ou *nove dez*	. . . . *noventa.*

Entre duas collecções de dezenas existem nove numeros intermediarios, cujos nomes se obtiverão enunciando a collecção mais fraca de dezenas, seguida dos nomes dos nove primeiros numeros; assim entre uma e duas dezenas, temos :

dez-um, dez-dous, dez-tres. . . . . . . *dez-nove*

que o uso transformou em :

onze, doze, treze. . . . . *dezenove;*

entre duas e tres dezenas, temos :

vinte e um, vinte e dous, vinte e tres. . . . *vinte e nove.*

. . . .

. . . .

D'esta maneira é que chegamos ao numero *noventa e nove;* se a este ajuntarmos uma unidade, teremos o numero seguinte, a que se deo o nome de *cem* ou *cento.* Considerou-se cem como uma nova unidade que se chamou *centena*, e contou-se por centenas como por unidades e dezenas :

uma centena, ou *cem,* ou *um cento*	. . . .
duas centenas, ou *dous centos*	. . . . *duzentos*
tres centenas, ou *tres centos*	. . . . *trezentos*
quatro centenas, ou *quatro centos*	. . . . *quatrocentos*
. . . .	nomes que o
. . . .	uso transformou
. . . .	em . . . . .
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
nove centenas, ou *nove centos*	. . . . . *novecentos*

Os nomes dous centos, tres centos, cinco centos, são tambem frequentemente empregados, porém quando se trata somente de numeros concretos.

Entre duas collecções de centenas consecutivas ha noventa e nove numeros intermediarios, cujos nomes se obtiverão enunciando a collecção mais fraca de centenas, seguida dos nomes dos noventa e nove primeiros numeros; assim entre uma e duas centenas, ou melhor ainda entre cem e duzentos, temos :

Cento e um, cento e dous, cento e tres. . . . *cento e vinte, cento e vinte um.* . . . *cento e trinta,*

cento e trinta e um . . . .
. . . . . . *cento e noventa e oito, cento e noventa e nove ;*

entre duas e tres centenas, ou melhor ainda entre duzentos e trezentos, temos :

Duzentos e um, duzentos e dous, duzentos e tres . . .
. . . . . *duzentos e vinte, duzentos e vinte um* . . .
. . . . . *duzentos e trinta, duzentos e trinta e um* . .
. . . .
duzentos e noventa e oito, duzentos e noventa e nove . .
. . . .
. . . .

É assim que chegamos ao numero, cujo nome é *novecentos e noventa e nove;* se a este ajuntarmos uma unidade, temos o seguinte numero, cujo nome é *mil.*

Considerou-se *mil* como considerámos *um* ou a unidade simples; isto é, assim como se formou dezenas e centenas de unidades simples, assim tambem se formarão dezenas e centenas de unidades de mil.

Formou-se por conseguinte mil collecções de mil, cujos nomes se obtiverão enunciando os mil primeiros numeros, seguidos da palavra mil, dizendo :

Um mil, dous mil, tres mil, quatro mil . . . . . .
. . *dez mil, onze mil.* . . . *vinte mil* . . .
cem mil, cento e um mil. . . . *novecentos e noventa e nove mil.*

Entre duas collecções de mil consecutivas existem novecentos e noventa e nove numeros intermediarios, cujos nomes fôrão obtidos enunciando a collecção mais fraca de mil seguida dos nomes dos novecentos e noventa e nove primeiros numeros; assim entre um e dous mil, temos :

Mil e um, mil e dous . . . . *mil e dez.* .

. . . . . . *mil e cem* . . . . *mil novecentos e noventa e nove;*

entre dous e tres mil, temos:

Dous mil e um, *dous mil e dous*. . . . . *dous mil e dez*. . . . . *dous mil e cem*. . . . . . . *dous mil nove centos e noventa e nove* . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

É assim que chegamos ao numero *novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove.*

Ajuntando a este ultimo uma unidade tem-se o seguinte numero, *mil mil*, ou *um milhão*, que foi tambem considerado da mesma maneira que a unidade simples, e a unidade de mil; isto é, assim como se formou dezenas e centenas de unidades simples, dezenas e centenas de mil, assim tambem se formarão dezenas e centenas de milhão.

Mil collecções de milhão derão lugar a uma nova unidade da mesma natureza que se chamou *billião* ou *milhar*. Mil collecções de billião formarão uma nova unidade da mesma natureza, o *trillião*; mil collecções de trillião chamou-se *quatrillião*, etc.

12. As differentes collecções de unidades: *um*, *dez*, *cem*, *mil*, *dez-mil*, *cem-mil*, *milhão*.... são tambem chamadas unidades de *primeira*, *segunda*, *terceira*, *quarta*, *quinta*, *sexta*, *septima ordem*, etc.

As unidades particulares, unidade simples, mil, milhão, billião, etc., são chamadas *unidades principaes*, *unidades ternarias*, ou *unidade de primeira*, *segunda*, *terceira*, *quarta classe*, etc.

DIVISÃO DAS ORDENS EM CLASSES.

Primeira ordem. .	unidades		
Segunda ordem. .	dezenas	de unid. simples.	Primeira classe.
Terceira ordem. .	centenas		
Quarta ordem. . .	unidades		
Quinta ordem. . .	dezenas	de mil. . . .	Segunda classe.
Sexta ordem. . . .	centenas		
Septima ordem. .	unidades		
Oitava ordem. . .	dezenas	de milhão. .	Terceira classe.
Nona ordem. . . .	centenas		
etc.		etc.	

As unidades de classes successivas são de mil em mil vezes maiores. As unidades de ordens successivas são de dez em dez vezes maiores; uma unidade de segunda ordem vale dez da primeira; uma da terceira ordem vale dez da segunda e cem da primeira; uma da quarta ordem vale dez da terceira, cem da segunda e mil da primeira e assim por diante. O processo da numeração decimal consiste, como vemos, em formar unidades, que são de dez em dez vezes maiores.

NUMERAÇÃO ESCRIPTA.

13. A exposição da numeração escripta decorre de uma maneira simples das convenções estabelecidas na numeração fallada. Pelo que dissemos (nº 12) vê-se que os numeros são considerados como formados de *unidades principaes* ou *ternarias*, que são as *classes*, taes são : *unidade simples, mil, milhão, billião,*... cada uma d'essas unidades forma tres ordens de unidades secundarias, *unidades, dezenas, centenas*; cada uma d'estas formando por sua vez nove collecções differentes : *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.*

Encarando os numeros debaixo d'este ponto de vista, duas cousas fôrão necessarias para poder represental-os pela escripta : 1° signaes convencionados que indicassem a ordem das differentes especies de unidades; 2° outros signaes que indicassem as differentes collecções d'essas unidades em cada uma d'essas ordens.

Imaginou-se primeiramente nove caractéres para representarem as nove collecções, que pode formar cada ordem de unidades : esses caractéres, a que se deo o nome de *algarismos*, são os seguintes :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
um,	dous,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove.

Para poder mostrar de uma maneira clara a necessidade dos primeiros signaes, tomemos um numero, por exemplo :

Seis mil quatro centos e vinte e cinco.

Este numero contem :

Seis mil, quatro centenas, duas dezenas, cinco unidades.

$$6^{\text{mil}}\ 4^{\text{centenas}}\ 2^{\text{dezenas}}\ 5^{\text{unidades}}.$$

Esta maneira de escrever os numeros, ainda que um pouco mais simples, é comtudo bastante incommoda e nada rapida.

Podia-se representar as differentes ordens por diversos signaes e escrevel-os em cima dos algarismos, assim como o fizemos para indicarmos as differentes collecções de unidades em cada ordem; porém isso seria introduzir um grande numero de signaes, e por conseguinte confusão; então tratou-se de procurar outro meio, que se podesse substituir ao uso dos signaes, e que facilitasse a escripta.

Este meio consistio na introducção de um principio, que é a base da numeração escripta.

14. Principio fundamenlal. *Todo algarismo collocado á esquerda de outro exprime unidades dez vezes mais fortes.*

De maneira que se em um numero um algarismo representa as unidades simples, o algarismo seguinte, collocado á sua esquerda, representará as dezenas, o seguinte as centenas, o seguinte as unidades de mil, e assim por diante.

Assim, conhecendo as differentes collecções de unidades de que se compõe um numero, elle poderá ser sempre escripto, e de uma maneira muito simples; para isso é bastante escrever-se os algarismos um ao lado do outro, indo da direita para a esquerda, começando pelo algarismo, que representa a collecção de unidades, escrevendo ao lado d'este o que representa a collecção de dezenas, e assim por diante, e em geral os algarismos que representão as collecções de todas as ordens de unidades, de que se compõe o numero dado. Por exemplo, o numero a cima será escripto:

6425.

Ha porém uma excepção á regra que acabamos de citar. Se em um numero as differentes ordens de unidades que o compôem não seguem a ordem natural de sua formação, n'este caso para evitar confusão, introduzio-se um decimo caracter, ou algarismo chamado *zero* (0), que por si só não tem valor algum; isto é, não representa collecção alguma de unidades, e que serve somente para occupar o lugar das differentes especies de unidades, que faltão no numero. Por exemplo, para escrevermos seis mil e cinco, observaremos que ao enunciado d'este numero faltão duas ordens de unidades, as centenas e dezenas, que serão por conseguinte substituidas por zeros, e o numero será escripto 6005.

D'esta maneira o algarismo 6 que representa a collecção de unidades de mil occupa a quarta ordem; ordem que devia occupar segundo o principio fundamental da numeração escripta.

Empregou-se em tudo dez caractéres differentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; com elles e com o principio estabelecido repre-

senta-se todos os numeros imaginaveis. Os nove primeiros são chamados algarismos significativos, porque representão uma certa collecção de unidades; o ultimo (0) é um algarismo sem valor, cujo fim já conhecemos.

Cada algarismo significativo considerado como representando uma certa collecção de unidades tem um valor particular a que se deo o nome de valor *absoluto;* valor que o algarismo tem de si mesmo; porém considerado em relação ao lugar que occupa no numero tem outro valor, *valor de posição*, que se chama *valor relativo* e que representa a ordem das unidades.

REGRA PRATICA PARA ENUNCIAR-SE UM NUMERO DADO.

15. I. Se o numero contem menos de quatro algarismos, enuncia-se successivamente, começando da direita para a esquerda, cada algarismo significativo, indicando o nome das unidades, que exprime.

Seja o numero 725.

Empregando as palavras irregulares leremos: *setecentos e vinte e cinco.*

Se o numero tivesse quatro algarismos, applicar-se-hia ainda a mesma regra, e o numero 3027 seria lido *tres mil e vinte sete.*

II. Se o numero contem mais de quatro algarismos, decompõe-se este numero em classes de tres algarismos cada uma a partir da direita (a ultima classe pode conter um ou dous algarismos); enuncia-se cada classe como se estivesse isolada, indicando a ordem das unidades do seo ultimo algarismo.

Seja o numero 27325407246:

Dividamol-o em classes de tres algarismos:

27, 325, 407, 246.

e observando a ordem do ultimo algarismo em cada classe, leremos,

Vinte e sete billiões-trezentos e vinte-cinco milhões-quatro centos e sete mil-duzentos e quarenta e seis.

As considerações expostas explicão porque dividimos o numero em classes de tres algarismos.

REGRA PRATICA PARA ESCREVER-SE UM NUMERO ENUNCIADO.

16. Para escrever em algarismos um numero enunciado, escreve-se successivamente um ao lado do outro os algarismos, que representão as centenas, dezenas, e unidades de cada ordem, a partir da direita e começando pelas mais altas unidades, tendo o cuidado de substituir zeros ás ordens de unidades, que não se enunciarem.

Seja o numero quatro billiões-duzentos e vinte e cinco, que será escripto:

4 000 000 225.

EXERCICIOS.

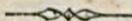
I. *Ler os numeros seguintes:*

25 — 39 — 294 — 472 — 111415

2505 — 60 — 250560 — 24607643

4967432074605

II. *Escrever em algarismos os numeros seguintes:*

Quinze — vinte e sete — trezentos e setenta e cinco — cinco milhões duzentos e vinte e quatro — mil e cinco — cento e nove — quatro billiões cinco mil e tres.

CAPITULO II.

ADDIÇÃO. — SUBTRACÇÃO.

Definições. — Signaes.

17. Chama-se *operações* as differentes maneiras de compôr e decompôr os numeros; é o que constitue o *calculo*.

Em arithmetica existem quatro operações fundamentaes, das quaes se podem deduzir todas as outras, e são as seguintes: *addição, subtracção, multiplicação, divisão;* a primeira e a terceira são operações de composição, e as outras duas de decomposição.

Prova é uma nova operação que serve para verificar o resultado de outra.

Theorema é uma verdade que se torna evidente por meio de um raciocinio que se chama demonstração.

Problema é uma proposição que exige uma solução.

Lemma é uma proposição que se demonstra, e que serve de base para a demonstração de um theorema, ou para a resolução de um problema.

Axioma é uma verdade evidente.

Para simplificar algumas vezes os raciocinios e calculos, empregão-se signaes, que são de duas especies; uns que indicão as operações a effectuar-se entre as quantidades, e outros que indicão as relações de grandeza, que existem entre ellas.

Fallaremos dos primeiros á medida que examinarmos as operações, e quanto aos segundos, são os seguintes:

$=$ (*Igual*) para indicar a igualdade entre duas quantidades; exemplo, $8 = 8$, que lê-se: *oito igual a oito.*

$<$ (*Menor*) para indicar que uma quantidade é menor que outra; exemplo, $7 < 11$, lê-se: *sete menor que onze.*

horizontal, que começão pelos numeros dados, é a somma procurada.

Se tivessemos muitos numeros de um só algarismo para serem addicionados, procurar-se-hia a somma de dous d'entre elles, a ella ajuntar-se-hia outro numero, ao resultado outro, e assim até ao ultimo; o resultado final seria a somma buscada.

Sejão 4, 5, 6, 3, 9, 2, numeros de que se busca a somma; operando como precedentemente, veriamos que :

$$4+5+6+3+9+2=29.$$

ADDIÇÃO DE DOUS OU MAIS NUMEROS DE MUITOS ALGARISMOS.

20. Podia-se obter a somma de dous numeros de muitos algarismos empregando-se o processo natural; um tal proceder seria longo, se os numeros de que se trata, fossem consideraveis; ainda mais longo, e mais incommodo se houvesse uma grande quantidade de numeros a addicionar-se; a este methodo laborioso foi substituido outro muito simples, e é n'este que consiste a verdadeira addição arithmetica, que vamos expôr.

É claro que muitos numeros sendo dados, se os concebermos decompostos em suas differentes unidades e se ajuntarmos separadamente as unidades de mesmo nome, o numero que contiver assim a somma das unidades, dezenas, centenas, etc., dos numeros dados, será a somma procurada.

Sejão por exemplo os numeros dados 27065, 207, 94325, 32456, de que se busca a somma.

Em virtude do que acabámos de dizer, e para mais commodidade adoptou-se a seguinte maneira de dispôr os numeros :

$$\begin{array}{r} 27065 \\ 207 \\ 94325 \\ 32456 \\ \hline 154053 \end{array}$$

A somma que buscamos sendo um numero formado das sommas parciaes das differentes unidades que compõem os numeros dados, vamos por conseguinte effectuar essas sommas parciaes, e para isso começaremos pelas unidades simples, e diremos :

$$5 + 7 + 5 + 6 = 23;$$

23 é a somma das unidades simples de todos os numeros, porém 23 compõe-se de 2 dezenas e 3 unidades, escrevemos 3 debaixo da columna das unidades e guardamos 2 para ajuntarmos á columna seguinte, que é a columna das dezenas e dizemos :

$$2 + 6 + 0 + 2 + 5 = 15;$$

15, somma das dezenas, compõe-se de 5 dezenas, que escrevemos debaixo da columna das dezenas, e de uma centena, que guardamos para ajuntarmos á columna das centenas, dizendo :

$$1 + 0 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

10, somma das centenas, vale uma unidade de mil que ajuntamos á columna seguinte, dizendo :

$$1 + 7 + 4 + 2 = 14;$$

14, somma das unidades de mil, contem 4 unidades de mil, que escrevemos debaixo da columna competente, e 1 dezena de mil que ajuntamos á columna das dezenas de mil, dizendo :

$$1 + 2 + 9 + 3 = 15;$$

15, somma das dezenas de mil, compõe-se de 5 dezenas de mil, que escrevemos debaixo da columna das dezenas de mil, e de 1 centena de mil, que escrevemos á sua esquerda. O numero 154053 encerrando a somma das differentes partes, de que se compõem os numeros dados, é a somma d'esses numeros.

21. Regra. *Escrevem-se os numeros uns debaixo dos outros,*

de maneira que as unidades de mesma ordem se correspondão; passa-se um traço horizontal sob o ultimo numero; faz-se successivamente a somma dos algarismos contidos em cada columna vertical, escrevendo debaixo da columna respectiva as unidades d'essa somma, guardando as dezenas para ajuntar-se á columna seguinte.

Observação. Se na addição de muitos numeros a somma dos algarismos de cada columna não excede 9, é indifferente começar a addição pela direita ou pela esquerda, porém, como o contrario tem lugar a maior parte das vezes, é preferivel começar-se pela direita; porque começando-se pela esquerda ter-se-hia de voltar aos algarismos já escriptos na somma para mudal-os.

PROVA DA ADDIÇÃO.

22. Verifica-se esta operação fezendo a addição dos algarismos de cada columna vertical debaixo para cima, se ella foi feita de cima para baixo; se o resultado é o mesmo, pode concluir-se que a operação é exacta.

Subtracção.

23. *A subtracção é uma operação que tem por fim diminuir um numero dado de tantas unidades, quantas ha em outro numero dado.*

O resultado da operação chama-se *resto, excesso,* ou *differença,* o maior dos numeros dados *minuendo,* e o menor *subtrahendo.*

É claro que o minuendo contem todas as unidades, que compõem o subtrahendo, como as que compõem o resto; é a razão, porque se diz que : a subtracção tem por fim, conhecendo-se a somma de dous numeros e um d'esses numeros, determinar o outro.

24. Pode-se chegar ao resultado d'esta operação *inversa* da

addição de duas maneiras: 1° ajuntando ao subtrahendo unidades sufficientes até formar-se um numero igual ao minuendo, e o numero de unidades ajuntadas será o resultado; 2° tirando do minuendo tantas unidades, quantas houver no subtrahendo, e o numero de unidades que restar no minuendo será a differença.

O MINUENDO SENDO MENOR QUE 20.

25. Sejão por exemplo 12 e 7 dous numeros de que se procura a differença.

Applicando o que dissémos (n° 24), e empregando um ou outro proceder, o que é muito facil, obtem-se por resultado 5. Da mesma maneira acha-se que a differença entre 19 e 7 é 12. É indispensavel dizer-se promptamente a differença de dous numeros no caso particular que acabámos de examinar. O signal que indica esta operação entre dous numeros é o seguinte (—), que se lê *menos*, assim as operações precedentes se indicão:

$$12 - 7 = 5 \qquad 19 - 7 = 12.$$

SUBTRACÇÃO DE DOUS NUMEROS QUAESQUER.

26. *Axioma.* A differença de dous numeros não muda de valor quando se ajunta ou diminue os dous termos da subtracção de uma mesma quantidade.

Sejão os numeros 4738, 2617 de que buscamos a differença. A marcha natural (n° 24) é quasi impraticavel no caso geral que examinamos. Procede-se de outra maneira, que, consistindo em fazer uma serie de subtracções parciaes e muito simples, offerece o resultado immediatamente.

É evidente que, se das differentes unidades que compõem o minuendo tirarmos as unidades respectivas, que compõem o subtrahendo, o numero que restar, numero formado de algarismos, que representão cada um a differença entre os algarismos de mesma ordem, será a differença dos dous numeros dados.

A operação se dispõe da maneira seguinte :

$$\begin{array}{r} 4738 \\ 2617 \\ \hline 2121 \end{array}$$

Pode acontecer que não se possa effectuar algumas subtracções parciaes; isto é, que alguns algarismos do minuendo sejão menores que os algarismos de mesma ordem no subtrahendo, como se vê no exemplo seguinte :

$$\begin{array}{r} 4702 \\ 2937 \\ \hline 1765 \end{array}$$

Subtrahir 7 de 2, não é possivel; augmentemos com 10 unidades os dous termos da subtracção, o que não pode altérar o resultado (nº 26); para isso augmentemos o algarismo 2 das unidades do minuendo com 10 unidades, o que faz 12, de que pode-se subtrahir 7 ; a differença 5 é collocada debaixo da primeira columna vertical. Augmentaremos o subtrahendo com 10 unidades, augmentando o algarismo 3 das dezenas com uma dezena, e então em lugar de 3, temos a subtrahir 4 do algarismo correspondente do minuendo, porém acha-se que este algarismo é zero, e que por conseguinte não se pode effectuar como ainda agora esta subtracção parcial. Fazendo o mesmo raciocinio diremos 4 de 10 resta 6, que se escreve no lugar competente, augmentaremos no subtrahendo o algarismo 9 de uma unidade, o que faz 10 que temos a subtrahir de 7, operação ainda impossivel; porém empregando ainda o mesmo raciocinio diremos : 10 de 17 resta 7, e emfim 3 de 4 resta 1, numeros que se escrevem debaixo das columnas respectivas.

27. Regra. *Para subtrahir dous numeros, um do outro, escreve-se o maior sobre o menor, de maneira que as unidades de mesma ordem figurem na mesma columna vertical; subtrahem-se os algarismos do menor dos algarismos corres-*

pondentes do maior, começando da direita para a esquerda, e escreve-se cada resultado parcial debaixo da columna que o produzio. Quando não se pode subtrahir um algarismo do subtrahendo do algarismo correspondente no minuendo, augmenta-se o algarismo d'este ultimo de dez unidades, e por compensação augmenta-se de uma unidade no subtrahendo o algarismo immediato ao algarismo que se considera.

Observação. Se no minuendo os algarismos são maiores que os de mesma ordem no subtrahendo, é indifferente começar-se a operação pela esquerda ou pela direita; porém se alguns d'elles são maiores, então deve começar-se pela direita, porque começando-se pela esquerda ter-se-hia de voltar a algarismos já escriptos para modifical-os.

PROVA DA SUBTRACÇÃO.

28. Verifica-se a subtracção por meio da addição; como o minuendo é a somma do subtrahendo mais a differença, por conseguinte, se, addicionando os dous ultimos, obtem-se o primeiro, pode concluir-se que a operação é exacta.

Complementos arithmeticos.

29. Chama-se *complemento* de um numero menor que 10 outro numero que é necessario ajuntar-se ao primeiro para formar-se 10.

Assim 3 é o complemento de 7, por isso que $7 + 3 = 10$.

O complemento de um numero menor que 100 é outro numero que junto ao primeiro completa 100.

Assim 37 é o complemento de 63, por isso que $63 + 37 = 100$.

Repetindo a mesma definição para um numero menor que 1000, 10000, 100000, etc., vemos que 525 é o complemento de 475, por isso que $475 + 525 = 1000$; que 7524 é o complemento de 2476, por isso que $2476 + 7524 = 10000$; que

14702 é o complemento de 85298, por isso que 85298 + 14702 = 100000, etc.

30. Observando que, nos segundos membros das igualdades fornecidas pelos exemplos acima, o numero de zeros que se achão ao lado da unidade é igual ao numero de algarismos que compõem os numeros dados, pode dizer-se geralmente :

O complemento de um numero é outro numero que é necessario ajuntar-se ao primeiro para formar-se um terceiro composto da unidade seguida de tantos zeros, quantos são os algarismos no numero dado.

APPLICAÇÃO DOS COMPLEMENTOS.

31. Por meio dos complementos arithmeticos a subtracção pode ser feita pela addição.

Sejão 325 e 37 dous numeros de que se busca a differença.

Empregando a regra ordinaria da subtracção, a differença é 288; porém se em lugar de subtrahir 37 de 325, ajunta-se a este ultimo o complemento de 37 que é 63, obtem-se um numero 388, que, diminuido de uma centena; isto é, de uma unidade da ordem a que foi completado, torna-se 288, numero obtido pela subtracção.

Tomemos ainda dous outros numeros, 1426 e 432.

Pela subtracção acha-se que :

$$1426 - 432 = 994,$$

e pelos complementos, notando que o complemento de 432 é 568,

$$1426 + 568 = 1994;$$

diminuindo 1994 de 1 mil, unidade da ordem a que o numero 432 foi completado, obtem-se justamente o mesmo resultado dado pela subtracção.

32. Em geral quando se tem addicionado o numero com o

complemento, é necessario sempre diminuir-se o resultado de uma unidade da ordem, a que foi completado o dito numero.

EXERCICIOS.

I. *A Europa tem* 168000000 *habitantes, a Asia* 580000000, *a Africa* 92000000, *a America* 150000000 *e a Oceania* 10000000. — *Qual é a população da terra?*

II. *Determinar o numero de estrellas visiveis* (sem auxilio de instrumentos) *sabendo que nossa vista só póde distinguir até ás estrellas de sexta grandeza e que* 20 *é o numero das estrellas de primeira grandeza,* 65 *o das estrellas de segunda,* 190 *o de terceira,* 425 *o de quarta,* 1100 *o de quinta e* 3200 *o de sexta grandeza.*

III. *A maior distancia do sol á terra é de* 35183000 *leguas, e a mais curta de* 34017200 *leguas.* — *Qual é a differença?*

IV. *O raio do equador é de* 3272077 *toesas, o do pólo é de* 3261139 *toesas.* — *Qual é a differença entre os dous raios da terra?*

V. *Demonstrar que logo que se ajuntão muitos numeros, a somma dos algarismos dos numeros ajuntados excede a somma dos algarismos do resultado de um numero exacto de vezes* 9.

VI. *Demonstrar que a somma de dous numeros addicionada com sua differença forma um numero que é dobro do menor.* maior

VII. *Demonstrar que, se da somma de dous numeros se subtrahe sua differença, obtem-se um numero que é dobro do menor.*

VIII. *Procurar tres numeros taes que a somma dos dous primeiros seja* 10, *a do segundo e terceiro seja* 18, *e a do primeiro e segundo* 14. terceiro

XI. *O ponto mais elevado da terra, acima do nivel do mar, Dhawalagiri é de* 8000 *metros; o ponto mais baixo da terra, abaixo do nivel do mar é de* 8000 *metros; qual é a distancia do ponto mais elevado ao ponto mais baixo da terra?*

X. *Misturou-se* 150 *kilogrammos de nitro com* 25 *kilogr. de*

carvão e 25 kilogr. de enxofre para fazer-se polvora, quantos kilogrammos obter-se-hão de polvora?

XI. *Genève está 407 metros acima do nivel do mar, e o hospicio de S^t Bernard 2090^m acima de Genève; qual é a altura do hospicio de S^t Bernard acima do mar?*

XII. *Demonstrar que para subtrahir de um numero a differença de dous outros basta subtrahir d'esse numero o minuendo e ajuntar o subtrahendo.*

CAPITULO III.

MULTIPLICAÇÃO.

Theoria e pratica da operação.

33. *A multiplicação é uma operação que tem por fim compôr um numero com um numero dado, como outro dado é composto com a unidade.*

O primeiro numero, que é o resultado da operação, chama-se *producto*, o segundo e o terceiro, que são os dous numeros dados, chamão-se *multiplicando* e *multiplicador*, ou *factores do producto*.

A multiplicação de 7 por 4 consiste em compôr o producto com o numero 7 como 4 é composto com a unidade; assim 4 contendo 4 unidades, o producto conterá 4 vezes 7 ou $7+7+7+7=28$, e diz-se que o producto de 7 por 4 é igual a 28; aqui 7 é o multiplicando e 4 o multiplicador.

Indica-se esta operação escrevendo entre os dous factores o signal (×), ou (.), que lê-se *multiplicado por*; assim para indicar-se a operação supra escreve-se:

$$7 \times 4 = 28$$

ou

$$7 . 4 = 28$$

que lê-se:

Sete multiplicado por quatro igual a vinte e oito.

34. Do exposto resulta que a multiplicação é um caso particular da addição; *é uma addição na qual as parcellas são compostas de quantidades iguaes entre si.*

Uma d'ellas é o multiplicando, o numero d'ellas o multiplicador e a somma o producto.

Assim pode-se fazer a multiplicação pela addição; para isso escreve-se o multiplicando tantas vezes quantas unidades contem o multiplicador; a somma d'esses numeros iguaes é o producto.

Assim para multiplicar 245 por 5 escreve-se :

$$245 \times 5 = 245 + 245 + 245 + 245 + 245 = 1225;$$

1225 é o producto de 245 por 5.

Porém se o multiplicador fosse um numero bastante grande, a operação não seria impossivel, porém quasi impraticavel; a este proceder longo e laborioso substituio-se outro, de que vamos tratar.

35. *Observação I.* Como o producto se compõe com o multiplicando, o producto é pois da mesma especie que o multiplicando; e o multiplicador indicando somente *um numero de vezes* é um numero abstracto.

36. *Observação II.* O producto de uma quantidade pela unidade é igual a essa quantidade; assim :

$$27 \times 1 = 27.$$

37. O producto de dous numeros chama-se *multiplo* de um de seos factores; em geral chama-se *multiplo de um numero* o producto d'esse numero por outro.

MULTIPLICAÇÃO DE DOUS NUMEROS DE UM SÓ ALGARISMO.

38. Os productos de dous numeros de um só algarismo se

achão inscriptos no quadro abaixo, conhecido sob o nome de *taboa de Pythagoras.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Forma-se este quadro, escrevendo na primeira linha horizontal os nove primeiros numeros significativos, ou melhor ainda os productos d'esses numeros pela unidade. Por baixo d'esta primeira linha escreve-se a segunda linha horizontal, que se compõe dos productos dos numeros da primeira por 2, productos que se obtem ajuntando cada algarismo da primeira linha comsigo mesmo. A terceira linha contem os productos dos numeros da primeira linha por 3, productos obtidos ajuntando cada algarismo da primeira linha aos numeros correspondentes na segunda, e assim por diante. A nona e ultima linha contem os productos dos numeros da primeira por nove, productos obtidos ajuntando cada algarismo da primeira linha aos numeros correspondentes da oitava.

Para obter-se n'este quadro o producto de dous numeros dados 7 e 5 por exemplo; procura-se na primeira linha horizontal o numero 7, e na linha vertical o numero 5; desce-se com o dedo a columna vertical que contem 7 até ao encontro

da linha horizontal que contem 5; e acha-se o producto 35 na intersecção das duas linhas.

Inutil é dizer a importancia que ha em saber-se de cór os productos de dous numeros simples quaesquer, pois o caso geral da multiplicação, como se verá, se reduz a multiplicações d'esse genero.

MULTIPLICAÇÃO DE UM NUMERO COMPOSTO POR UM NUMERO SIMPLES.

39. Seja proposto multiplicar 576 por 3; sabe-se que

$$576 \times 3 = 576 + 576 + 576;$$

porém a somma d'estas tres quantidades iguaes se compõe de tres vezes a somma das unidades mais tres vezes a somma das dezenas, mais tres vezes a somma das centenas, logo para multiplicar 576 por 3 basta multiplicar por 3 cada algarismo do numero 576, começando pelo algarismo das unidades, e guardando as dezenas de cada producto parcial para ajuntar-se ao producto parcial seguinte.

40. REGRA. *Para multiplicar um numero composto de muitos algarismos por um numero de um só algarismo, multiplica-se os differentes algarismos do multiplicando pelo multiplicador.*

MULTIPLICAÇÃO DE DOUS NUMEROS COMPOSTOS DE MUITOS ALGARISMOS.

41. PRINCIPIO I. *Para multiplicar um numero inteiro pela unidade seguida de zeros, basta escrever os zeros á direita do numero dado,*

Trata-se de demonstrar que

$$2567 \times 100 = 256700$$

Cada algarismo significativo tendo avançado de duas ordens para a esquerda, toma um valor cem vezes maior, o numero por conseguinte tambem toma um valor cem vezes maior, e acha-se d'esta maneira multiplicado por 100.

42. Principio II. *Para multiplicar um numero inteiro por um algarismo seguido de zeros, basta multiplicar o multiplicando pelo algarismo significativo, e escrever á direita do producto os zeros que se achão no multiplicador.*

Trata-se de demonstrar que

$$246 \times 200 = 49200,$$

492 sendo o producto de 246 por 2.

Com effeito, obtem-se o producto de 246 por 200, effectuando a addição seguinte :

composta de 200 parcellas iguaes a 246 ; ajuntando porém essas parcellas duas a duas, forma-se outra columna composta de 100 quantidades iguaes a $246 \times 2 = 492$; ora é claro que a somma da primeira addição é a mesma que a da segunda, e como esta é igual a 492×100 ou 49200, logo $246 \times 200 = 49200$.

o. q. e. n. d.

43. É n'estes dous principios que é fundada a theoria geral da multiplicação.

Sejão dous numeros quaesquer 476 e 362 de que se busca o producto :

$$
\begin{array}{r}
476 \\
362 \\
\hline
952 \\
28560 \\
142800 \\
\hline
172312
\end{array}
$$

Multiplicar 476 por 362 é repetir 476 trezentas e sessenta e duas vezes, ou 2 vezes, mais 60, mais 300 vezes. Repetir 476 duas vezes é multiplical-o por 2 (nº 39), o producto 952 escreve-se debaixo do risco horisontal, de maneira que os differentes algarismos fiquem debaixo dos algarismos de mesma ordem no multiplicador.

O producto de 476 por 60 é 28560 (nº 42), que se escreve debaixo do primeiro, de maneira que as unidades de mesma ordem se correspondão.

Pode-se deixar de escrever o zero á direita do producto considerando 2856 como um numero de dezenas ; o algarismo 6 deve então ser collocado na columna das dezenas.

O producto de 476 por 300 é 142800, numero que é escripto sob os outros productos parciaes de maneira que as unidades de mesma ordem se correspondão. Pode-se como precedentemente deixar de escrever os dous zeros á direita do producto, considerando 1428 como um numero de centenas ; o algarismo 8 deve então occupar a columna das centenas.

É claro que a somma 171312 d'esses tres productos parciaes é o producto total.

44. Regra. *Para multiplicar dous numeros compostos de muitos algarismos, escreve-se o multiplicador sob o multiplicando, e soblinha-se o multiplicador ; multiplica-se o multiplicando por cada algarismo do multiplicador a partir da direita, escrevendo cada producto parcial, de maneira que o primeiro algarismo á direita fique debaixo do algarismo que servio de*

multiplicador; a somma d'esses productos parciaes, é o producto buscado.

45. *Observação* I. Se o multiplicando e o multiplicador terminão em zeros, faz-se abstracção d'elles na formação dos productos parciaes, porém á direita do producto total escreve-se tantos zeros, quantos houver nos dous factores.

Com effeito seja 27000 × 1500 os dous factores dados.

Multiplica-se (27000) por 1500 multiplicando (27000) por 15 e ajuntando dous zeros ao resultado; de outro lado multiplica-se 27000 por 15 multiplicando 27 por 15 e ajuntando tres zeros ao resultado, logo basta multiplicar 27 por 15 e escrever cinco zeros no resultado.

46. *Observação* II. É indifferente a maneira de dispôr os dous factores quando se quer effectuar uma multiplicação, porém para maior simplicidade e segurança é mister escrever o multiplicador sob o multiplicando, de maneira que as unidades de mesma ordem se correspondão.

É indispensavel tambem começar a operação pela direita do multiplicando por causa das reservas; porém é indifferente o começar-se por este ou aquelle algarismo do multiplicador, com tanto que se escreva os productos em seos lugares competentes, e uns debaixo dos outros.

47. Principio I. *Se o multiplicando e o multiplicador tornão-se um certo numero de vezes maior ou menor, o producto torna-se esse mesmo numero de vezes maior ou menor,*

I. Se o multiplicando torna-se por exemplo tres vezes maior, o multiplicador ficando o mesmo, o producto será tres vezes maior, por isso que conterá o mesmo numero de vezes uma quantidade tres vezes maior.

II. O multiplicando ficando o mesmo, se o multiplicador torna-se tres vezes maior, o producto será tres vezes maior, por isso que conterá a mesma quantidade tomada um numero de vezes tres vezes maior.

Com o mesmo raciocinio demonstrar-se-hia a segunda parte do theorema.

48. Principio II. *Um producto de dous numeros não muda de valor quando se inverte a ordem dos factores.*

Quer-se demonstrar que

$$5 \times 3 = 3 \times 5$$

Disponhamos em uma linha horizontal cinco unidades, que são as que compõem o numero 5, e repetamos essa linha 3 vezes :

```
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
```

Para avaliar o numero de unidades que se achão n'este quadro pode-se proceder ou por linhas horizontaes, ou por linhas verticaes ; no primeiro caso acha-se que esse numero é 5×3, e no segundo 3×5, logo.

$$5 \times 3 = 3 \times 5$$

Observação. Como na resolução dos problemas que dão lugar a uma multiplicação considerão-se os numeros como abstractos, vê-se que é indifferente, quanto ao resultado, tomar um dos dous numeros por multiplicando ou multiplicador.

Na pratica por mais commodidade toma-se por multiplicando o numero que contem mais algarismos.

49. Principio III. *O numero dos algarismos de um producto de dous factores é ao maximum igual ao numero dos algarismos nos dous factores, e ao minimum igual a esse mesmo numero diminuido de uma unidade.*

Seja quatro o numero dos algarismos no multiplicando, e tres no multiplicador. O multiplicando sendo um numero de quatro algarismos é maior que 1000, por conseguinte o producto de um numero de 4 algarismos por um numero de 3 é menor que 10000×1000 ou 10000000, isto é, menor que o menor numero de 8 algarismos, logo tem quando muito 7

algarismos, tantos quantos existem em ambos os factores, logo a primeira parte do principio se acha demonstrada.

O menor numero de quatro algarismos é 1000, o menor numero de tres algarismos é 100, por conseguinte o producto de um numero de quatro algarismos por outro de tres é ao minimum igual a $1000 \times 100 = 100000$, numero de seis algarismos; isto é, de tantos quantos existem em ambos os factores menos um, logo a segunda parte do theorema se acha demonstrada.

PROVA DA MULTIPLICAÇÃO.

50. O principio II permitte tomar o multiplicando por multiplicador e *vice-versa;* por conseguinte verificar-se-ha o resultado de uma multiplicação, operando de novo e tomando por multiplicando o factor, que servio de multiplicador na primeira operação.

Producto de muitos factores.

51. Até aqui não temos considerado senão dous factores na multiplicação ; pode acontecer que tendo multiplicado um numero por outro, tenhamos de multiplicar seo producto por um terceiro, o novo producto por um quarto numero, e assim successivamente; esta maneira de operar é o que se chama *multiplicar um numero successivamente por muitos outros.*

Indica-se esta operação da maneira seguinte :

$$4 \times 3 \times 7 \times 6 \times 9;$$

o que quer dizer que 4 deve ser multiplicado por 3, o producto por 7, e assim successivamente.

Os numeros 4, 3, 7, 6, 9, são os factores do producto $4 \times 3 \times 7 \times 6 \times 9$.

52. PRINCIPIO. *Logo que em um producto de muitos factores, um d'elles torna-se um certo numero de vezes maior ou menor,*

o producto torna-se esse mesmo numero de vezes maior ou menor.

Se no producto

$$4 \times 5 \times 3 \times 7$$

o factor 3 torna-se 11 vezes maior, o producto

$$4 \times 5 \times 3 \times 11 \times 7 \text{ ou } 4 \times 5 \times 33 \times 7$$

torna-se 11 vezes maior que o precedente : com effeito, o producto 4×5 ou 20 é o mesmo nos dous productos ; 20 multiplicado por 33, numero 11 vezes maior que 3, dá um producto 11 vezes maior, o qual multiplicado pelo ultimo factor 7, que é commum, dá um producto que é 11 vezes maior que $4 \times 5 \times 3 \times 7$.

A demonstração da segunda parte do theorema é identica á da primeira.

Corollario. *Logo que se introduz ou supprime um factor em um producto de muitos factores, o producto torna-se tantas vezes maior ou menor quantas unidades ha no dito factor.*

A razão d'isto é porque o producto

$$3 \times 5 \times 7$$

é igual ao producto

$$3 \times 5 \times 7 \times 1,$$

sobre o qual se applicará o theorema precedente, multiplicando o factor 1 pelo factor dado.

Observação. Para clareza dos raciocinios na demonstração dos theoremas, nunca se effectuão os productos dos numeros: para indicar um producto effectuado, introduz-se entre parenthesis os factores d'esse producto, separados pelo signal (×); ou então, não querendo empregar os parenthesis, escrevem-se os

factores um ao lado do outro separados por um ponto (.), assim

$$(3 \times 4 \times 5 \times 7) \text{ ou } 3.\ 4.\ 5.\ 7$$

indica o producto effectuado d'esses factores.

Methodo abreviado para effectuar-se a multiplicação.

53. Pode-se obter o producto de dous numeros de muitos algarismos sem escrever os productos parciaes do multiplicando pelo multiplicador.

Sejão por exemplo 645 e 237, dous numeros de que se busca o producto.

	645
	237
total	152865

Sabe-se que o producto compõe-se dos productos parciaes de cada algarismo do multiplicando por cada algarismo do multiplicador (algarismos tomados com seos valores relativos); assim empregando o methodo ordinario da multiplicação para multiplicar 645 por 237, dever-se-hia fazer nove multiplicações parciaes, a saber : 5×7, 40×7, 600×7, 5×3, 40×3, 600×3, 5×2, 40×2, 600×2 ; de outro lado notando que no producto total cada algarismo representa as unidades da somma dos productos parciaes, que representão unidades de mesma ordem que esse algarismo, vê-se que, se fosse possivel achar facilmente todos os productos parciaes, que representão unidades da mesma ordem, poder-se-hia obter os differentes algarismos do producto total; e é n'isto que consiste o methodo abreviado de que se trata.

O producto das unidades do multiplicando pelas do multiplicador, dá unidades; e não ha senão esse producto que dê

unidades; logo o producto 35 de 5 por 7 forma o algarismo 5 das unidades do producto total, e ha 3 dezenas de reserva. Para obter-se o algarismo das dezenas do producto total, deve-se procurar os differentes productos parciaes, que só dêem dezenas: é facil ver-se que não ha senão dous, o producto das dezenas do multiplicando pelas unidades do multiplicador (4×7), e o producto das unidades do multiplicando pelas dezenas do multiplicador (5×3); fazendo a somma d'esses productos parciaes, e ajuntando 3 de reserva; isto é, $28 + 15 + 3 = 46$, obtem-se o algarismo 6 das dezenas do producto total e ha 4 de reserva.

O producto das centenas do multiplicando pelas unidades do multiplicador (6×7), o producto das centenas do multiplicador pelas unidades do multiplicando (2×5), e o producto das dezenas do multiplicando pelas dezenas do multiplicador (4×3) dão centenas, e não ha senão esses tres, que dêem centenas; fazendo pois a somma e ajuntando 4 de reserva, temos: $42 + 10 + 12 + 4 = 68$; 8 é pois o algarismo das centenas do producto, e ha 6 mil de reserva. O producto das centenas do multiplicando pelas dezenas do multiplicador (6×3), e o producto das centenas do multiplicador pelas dezenas do multiplicando (2×4), dão unidades de mil, e são os unicos, logo o algarismo 2 das unidades da somma $18 + 8 + 6 = 32$, é o algarismo das unidades de mil do producto total; ha 3 de reserva. O producto das centenas do multiplicando pelas centenas do multiplicador (6×2) dá dezenas de mil; ajuntando pois 3 de reserva a 12, temos 15, que são os dous ultimos algarismos do producto total. O numero 152865 é pois o producto de 645 por 237.

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *A terra é pouco mais ou menos 49 vezes maior que a lua, esta é 1405000 menor que o sol. Quantas vezes é o sol maior que a lua?*

Solução. É facil ver-se que, por isso que a lua é 49 vezes menor que a terra, e que esta é 1405000 vezes menor que o sol. A lua será 49 × 1405000 ou 68845000 vezes menor que o sol.

II. *Ouvio-se o estrondo de um trovão* 12 *segundos depois da apparição do relampago; sabendo-se que o som percorre* 340 *metros em um segundo, e fazendo-se abstracção do tempo empregado pela luz, cuja velocidade é consideravel, pergunta-se a distancia, a que se achava da terra, a nuvem tempestuosa no momento do phenómeno?*

Solução. Por isso que em 1ˢ o som percorre 340ᵐ, em 12ˢ percorrerá 340 × 12 ou 4080ᵐ: tal é a distancia a que se achava da terra a nuvem no momento do phenómeno electrico.

III. *Dous correios partem ao mesmo tempo de Paris para Bordeaux, um d'elles anda* 11 *kilometros por hora, e o outro* 8 *Pergunta-se a que distancia se acharão um do outro* 12 *horas depois da partida?*

Solução. Se em 1 h. o primeiro anda 11 kil., em 12 h. andará 11 × 12 ou 132 kil.; se em 1 h. o segundo anda 8 kil., em 12 h. andará 8 × 12 ou 76 kil.; por conseguinte, no fim das 12 h., o primeiro achando-se a 132 kil. do ponto de partida, e o segundo a 76 kil., a distancia que os separa é pois de 132-76 ou 56 kil.

IV. *Um pae tem* 40 *annos, seo filho* 8; *pergunta-se em que tempo a idade do pae será tres vezes maior que a do filho.*

Solução. O pae tem 32 annos mais que o filho; por conseguinte quando sua idade fôr tripla da do filho, a idade do pae menos a do filho será igual a 32, ou 3 vezes a idade do filho menos a idade do filho será igual a 32, ou 2 vezes a idade do filho será igual a 32; por conseguinte a idade do filho será 16 annos; e como elle tem hoje 8 annos, a differença 16 - 8 = 8 é a solução do problema. Com effeito vemos que 40 + 8 ou 48 é o triplo de 8 + 8 ou 16.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

V. *A luz percorre* 77000 *leguas em um segundo; a luz do sol*

emprega para chegar á terra 8 minutos e 18 segundos. Qual é a distancia do sol á terra?

VI. *Um pae tem 40 annos, e seo filho 8. Em que tempo a idade do pae será o dobro da do filho?*

VII. *Pergunta-se o comprimento de uma ilha, sabendo-se que um observador collocado em uma de suas extremidades deo um tiro de peça, e outro observador collocado na extremidade opposta, só ouvio o tiro 36 segundos depois de ter visto a inflamação da polvora.*

VIII. *O raio da terra é igual a 1450 leguas, a distancia do sol á terra igual a 2400 raios terrestres. Qual é a distancia em leguas do sol á terra?*

IX. *A circumferencia da terra contem 360 gráos, e cada gráo vale 25 leguas ou 20 leguas marinhas. Pergunta-se quantas leguas contem a circumferencia terrestre?*

X. *A differença de dous numeros é 40, e se de cada um d'elles subtrahir-se 80, um ficará tres vezes maior que outro. Determinar esses dous numeros.*

CAPITULO IV.

DIVISÃO.

Theoria e pratica da operação.

54. A divisão é uma operação que tem por fim, conhecendo-se o producto de dous factores, chamado *dividendo*, e um d'elles, chamado *divisor*, determinar o outro chamado *quociente* ou *razão*. Ainda se define a divisão dos dous modos seguintes.

A divisão é uma operação que tem por fim dividir um numero dado (o dividendo) em tantas partes iguaes, quantas unidades contem outro nnmero dado (o divisor).

A divisão é uma operação que tem por fim determinar quantas

vezes um numero dado (o dividendo) contem outro numero dado (o divisor).

55. Vamos agora ver que essas tres definições só fazem uma, e que todas teem por fim *determinar um numero que, multiplicado pelo divisor, reproduza o dividendo.*

Supponhamos que o dividendo seja 28, e o divisor 7; busquemos o quociente applicando successivamente as tres definições.

O dividendo 28 é um producto de dous factores, dos quaes um é 7; pela taboa da multiplicação vê-se facilmente, que o outro é 4, por isso que $28 = 7 \times 4$; assim o quociente 4 é tal que multiplicado por 7 reproduz o dividendo 28.

Trata-se de dividir 28 em 7 partes iguaes; se n representa uma d'essas partes, deve-se ter:

$$28 = n + n + n + n + n + n + n$$

ou

$$28 = n \times 7 = 7 \times n$$

assim como na primeira definição, a questão é determinar um numero que, multiplicado por 7, reproduza 28.

O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente, contem o divisor tantas vezes, quantas unidades contem o quociente; por conseguinte na divisão de 28 por 7, o quociente indica o numero de vezes que o divisor é contido no dividendo.

Assim todas essas tres definições só fazem uma; porém adoptaremos a primeira.

Indica-se esta operação entre dous numeros da maneira seguinte: $24 : 6$ ou $\frac{24}{6}$, que se lê: 24 *dividido por* 6.

56. *Processo natural.* O dividendo sendo a somma de muitas quantidades iguaes ao divisor, para obter-se o numero dessas quantidades, que não é outra cousa senão o quociente, bastará subtrahir o divisor successivamente do dividendo até esgotal-o; e o numero de subtracções que se tiver em feito, será o quociente. Por exemplo, para obtermos o quociente de $\frac{24}{6}$, diremos:

$24-6=18$, $18-6=12$, $12-6=6$, $6-6=0$; tendo-se feito quatro subtracções, 4 será o quociente, assim $\frac{24}{6}=4$; com effeito $24=6\times 4$.

57. Porém se em lugar de 24 tivessemos 29, procedendo da mesma maneira achariamos 4 por quociente e ficaria ainda 5, de que não se póde subtrahir 6. N'este caso diz-se que a divisão não se faz exactamente, e que o quociente é 4, porém que ha um *resto* 5.

58. Mais tarde veremos como se procede para ter-se um quociente exacto; isto é, tal, que multiplicado pelo divisor, reproduza o dividendo.

Agora só considerâmos *a divisão dos numeros inteiros*, que tem por fim dar *a parte inteira* do quociente, ou melhor ainda, *o maior numero de vezes* que o divisor é contido no dividendo.

Assim, procurar o quociente de 29 por 6 significa procurar o maior numero de vezes que 6 é contido em 29.

59. A differença entre o dividendo dado, e o maior multiplo do divisor contido no dividendo é o resto da operação. Assim $29-6\times 4=29-24=5$, é o resto da divisão de 29 por 6.

É claro que todo o resto é menor que o divisor.

60. Ha dous casos principaes a considerar-se na divisão dos numeros inteiros: *o divisor é numero de um só algarismo, ou numero composto de muitos algarismos.* Em cada um d'esses dous casos examinaremos ainda dous outros: *o dividendo é menor que 10 vezes o divisor, ou maior que 10 vezes o divisor.*

61. Primeiro caso. *O divisor é numero de um só algarismo.*

I. *O dividendo é menor que 10 vezes o divisor,* O dividendo sendo menor que 10 vezes o divisor, o quociente é numero de um só algarismo, que será dado pela taboa da multiplicação. Se o dividendo se achar n'essa taboa, será muito facil obter-se o quociente; com effeito, pelo habito que temos de dizermos promptamente os productos de dous numeros de um só algarismo, poderemos, com a mesma promptidão, determinar um

dos factores de um producto, conhecendo esse producto, e um dos seos factores.

Assim, o quociente da divisão de 28 por 7 é 4, por isso que $28 = 7 \times 4$; porém se o dividendo não se achar na taboa; isto é, se o dividendo não fôr um producto exacto do divisor por outro numero, como no exemplo $\frac{34}{7}$, então é facil ver-se que: $34 > 7 \times 4$, e $34 < 7 \times 5$, e por conseguinte o quociente é comprehendido entre 4 e 5; diz-se que 4 é o quociente *approximado a menos de uma unidade por defeito*; podia-se tambem tomar 5; porém este quociente seria *approximado a menos de uma unidade por excesso.*

62. II. *O dividendo é maior que 10 vezes o divisor.* Seja 3475 a dividir por 7. É facil ver-se que:

$$700 < 3475 < 7000$$

ou

$$7 \times 100 < 3475 < 7 \times 1000;$$

o quociente é pois comprehendido entre 100 e 1000, por conseguinte consta de tres algarismos; representando por $a.\ b.\ c$ o quociente buscado, e por R o resto da divisão, se houver, temos:

$$3475 = 7 \times a.\ b.\ c + R;$$

R sendo menor que 7, o producto $7 \times abc$ é contido no dividendo 3475 o mesmo numero de vezes como se 3475 representasse o producto puro do divisor 7 pelo quociente $a.\ b.\ c.$ O dividendo pois sendo o producto do divisor pelo quociente se compõe de tres productos parciaes: do producto do divisor pelas centenas do quociente, do producto do divisor pelas dezenas do quociente, e do producto do divisor pelas unidades do quociente. Tratemos de separar esses tres productos parciaes: o producto do divisor, pelas centenas do quociente, não pode dar unidades inferiores ás centenas; por conseguinte será contido nas 34 centenas do dividendo, que podem encerrar, alem do producto puro do divisor pelas centenas do quociente, as centenas re-

fluindo dos dous outros productos parciaes; isto é, do producto do divisor pelas dezenas do quociente, e do producto do divisor pelas unidades do quociente; porém as dezenas e as unidades do quociente fórmão um numero menor que 100; por conseguinte, o producto pelo divisor é menor que 700, e a reserva de centenas feita sobre esse producto, é menor que 7; logo o divisor não é contido n'essa reserva uma só vez; por conseguinte é contido em 34 centenas o mesmo numero de vezes como se 34 fosse o producto puro do divisor pelas centenas do quociente. Somos pois levados a dividir 34 por 7: o quociente 4 representa o algarismo das unidades mais fortes do quociente.

3475	7
28	496
675	
63	
45	
42	
3	

Multiplicando 7 por 4, e subtrahindo o producto 28 centenas do dividendo, temos o resto 675, que encerra o producto do divisor pelas dezenas do quociente, o producto do divisor pelas unidades do quociente, e o resto da divisão, se houver; quanto ao resto, sabemos que nada influe sobre a determinação dos algarismos do quociente. Separemos os dous productos parciaes; o producto do divisor pelas dezenas do quociente não pode dar unidades inferiores ás dezenas; por conseguinte será contido nas 67 dezenas do numero 675, que podem encerrar, alem do producto puro do divisor pelas dezenas de quociente, as dezenas refluindo do outro producto parcial; isto é, do producto do divisor pelas unidades do quociente; porém as unidades do quociente não chegão a 10, logo o producto por 7 é menor que 70, e a reserva de dezenas feita sobre esse producto é menor que 7, logo 7 é contido em 67 o mesmo numero de vezes como se 67 representasse o producto puro de 7 pelas dezenas do quociente; dividamos pois 67 por 7,

o quociente 9 representa o algarismo das dezenas do quociente; multiplicando 7 por 9 e subtrahindo o producto 63 dezenas do numero 675, resta-nos o numero 45, que contem o ultimo producto parcial; isto é, o producto do divisor pelas unidades do quociente, mais o resto da divisão, se houver; este resto não influe, como sabemos, sobre a determinação do algarismo que nos falta; por conseguinte dividindo 45 por 7, o quociente 6 é o ultimo algarismo do quociente, algarismo das unidades; multiplicando 6 por 7, e subtrahindo o producto 42 de 45, temos 3 por differença: 3 é pois o resto da divisão, e 496 o quociente inteiro.

63. Segundo caso : *O divisor é numero de muitos algarismos.*

I. *O dividendo é menor que* 10 *vezes o divisor.* Seja por exemplo o numero 4738 que queremos dividir por 694.

O dividendo sendo menor que 10 vezes o divisor, o quociente é menor que 10, e por conseguinte é numero de um só algarismo :

4738	694
4164	6
574	

Seja *a* esse quociente; o dividendo compõe-se pois de tres productos parciaes : do producto do quociente pelas centenas do divisor, do producto do quociente pelas dezenas do divisor, do producto do quociente pelas unidades do divisor. O primeiro producto não pode dar unidades inferiores ás centenas; por conseguinte será contido nas 47 centenas do dividendo, que podem encerrar, alem d'esse producto, as reservas de centenas feitas sobre os dous outros productos; logo pode acontecer que, dividindo 47 por 6, se obtenha um algarismo muito forte, do que seremos advertidos, se o producto d'esse algarismo pelo divisor dér um producto maior que o dividendo 4738. É bom notarmos que não ha necessidade de fazer o pro-

ducto para sabermos que o algarismo achado não é o verdadeiro quociente; basta para isso multiplicar esse algarismo pelo segundo algarismo do divisor a partir da esquerda e ajuntar a reserva de centenas feita sobre esse producto ao producto do quociente achado pelo primeiro algarismo do divisor; se esta addição dér uma somma maior que o numero de centenas do dividendo, então conclue-se que o algarismo posto no quociente não é o verdadeiro quociente; diminue-se esse algarismo de uma unidade, emprega-se ainda a mesma verificação, e assim até que se chegue ao verdadeiro algarismo do quociente. Pode acontecer que, temendo pôr um algarismo muito forte no quociente, se ponha um muito fraco; seremos advertidos d'esse engano, se o resto da operação fòr maior que o divisor.

Passemos á applicação; dividindo 47 por 6, achamos 7 por quociente, que pode ser um algarismo muito forte; porém pondo em pratica os meios que acima indicámos, diremos : 7 vezes 9 fazem 63; retenho 6 centenas, que juntas ao producto 42 provindo de 7 × 6, fazem uma somma 48 maior que 47, numero de centenas no dividendo, logo 7 é um algarismo muito forte; diminuindo-o de uma unidade temos 6, sobre o qual ensaiando o mesmo proceder, achamos que preenche as condições necessarias; multiplicando 694 por 6, temos por producto 4164; subtrahindo-o do dividendo 4738, temos por differença 574, que sendo menor que o divisor, representa o resto da divisão.

64. II. *O dividendo sendo* 10 *vezes maior que o divisor*. Este é o caso geral da divisão.

Seja 437695 um numero que queremos dividir por 576.

É facil ver-se que :

$$57600 < 437695 < 576000$$

ou

$$576 \times 100 < 437695 < 576 \times 1000;$$

o quociente, sendo comprehendido entre 100 e 1000, tem 3 algarismos; sejão a, b, c esses tres algarismos, a sendo um nu-

mero de centenas, b um numero de dezenas e c um numero de unidades. O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociete, compõe-se de tres productos parciaes, do producto do divisor por a, do producto do divisor por b e do producto do divisor por c; tratemos de separar esses tres productos parciaes, o primeiro producto não póde dar unidades inferiores ás centenas; por conseguinte será contido nas 4376 centenas do quociente, que podem encerrar, alem d'esse producto, as reservas de centenas feitas sobre os dous outros productos parciaes; porém por maior que sejão b e c, o numero $b+c$ será sempre menor que 100, por conseguinte o producto de $(b+c)$ por 576 será sempre menor que 57600, logo a reserva de centenas feita sobre esse producto será menor que 576; por conseguinte 576 é contido em 4376 o mesmo numero de vezes como se 4376 representasse o producto puro de 576 pelas centenas do quociente :

437695	576
4032	759
34495	*abc*
2880	
5695	
5184	
511	

dividindo pois 4376 por 576 (nº 63) achamos por quociente 7, que representa o algarismo das centenas do quociente; multiplicando 576 por 7, e subtrahindo do dividendo o producto 4032, que é um numero de centenas, temos o resto 34495, que contem ainda os dous outros productos parciaes, e o resto da divisão, se houver. O producto do divisor por 6, não podendo dar unidades inferiores ás dezenas, será contido nas 3449 dezenas do novo dividendo, que podem conter, alem d'esse producto, as reservas de dezenas feita sobre o outro producto parcial; porem c, por maior que seja, é sempre menor que 10; por conseguinte o producto de c por 576 é sempre

menor que 5760, e a reserva de dezenas feita sobre esse producto é menor que 576, logo o divisor não é contido uma só vez n'essa reserva, logo o é em 3449 o mesmo numero de vezes como se 3449 representasse o producto puro do divisor 576 pelas dezenas do quociente. Dividindo 3449 por 576 (nº 63) achamos por quociente 5, que é pois o algarismo das dezenas; multiplicando 576 por 5, e subtrahindo do novo dividendo o producto 2880, que é um numero de dezenas, temos ainda um resto que contem o ultimo producto parcial e o resto da divisão, se houver; porém este resto sendo menor que o divisor 576, não influe sobre o ultimo algarismo do quociente; dividindo pois 5695 por 576 temos por quociente 9, que é o ultimo algarismo ou o algarismo das unidades do quociente buscado; multiplicando 576 por 9, e subtrahindo do novo dividendo o producto 5184, temos por differença 511, numero menor que o divisor, e que representa o resto da divisão.

65. Regra geral. *Para achar o quociente da divisão de dous numeros inteiros, separa-se á esquerda do dividendo o menor numero d'algarismos possivel, que contenha ao menos uma vez o divisor; divide-se pelo divisor esse numero, que se chama primeiro dividendo parcial, e obtem-se o primeiro algarismo do quociente, ou o algarismo das mais altas unidades do quociente. Multiplica-se esse algarismo pelo divisor, e subtrahe-se o producto do dividendo parcial; obtem-se um resto, á direita do qual se escreve o algarismo seguinte do dividendo, o que forma o segundo dividendo parcial; divide-se este ultimo numero pelo divisor e tem-se o segundo algarismo do quociente; multiplica-se esse algarismo pelo divisor, e subtrahe-se o producto do segundo dividendo parcial; ao lado do resto escreve-se o seguinte algarismo do dividendo, o que forma o terceiro dividendo parcial, sobre o qual se opera como precedentemente, e assim successivamente, até que se tenha empregado todos os algarismos do dividendo. Se um dos dividendos parciaes fôr menor que o divisor, escreve-se um zero no quociente, e ao lado do dividendo parcial o seguinte algarismo do dividendo, e procede-se como indicámos.*

66. *Observação I*. É necessario em geral começar-se a divisão de dous numeros pela esquerda do dividendo; porque é impossivel distinguir no dividendo o producto do divisor pelas unidades simples do quociente.

67. *Observação II*. Se o dividendo e o divisor se terminão em zeros, supprime-se em ambos o mesmo numero de zeros, e isto não altera o quociente; porém o resto é multiplicado pela unidade seguida de tantos zeros, quantos se supprimírão; assim o quociente da divisão de 250000 por 3000 é o mesmo que a de 250 por 3; isto é:

$$\frac{250000}{3000} = \frac{250}{3}$$

Com effeito $250 = 3 \times 83 + 1$; isto é, 250 unidades igualão 83 vezes 3 unidades mais uma unidade; e por conseguinte 250 unidades de mil, igualão 83 vezes 3 unidades de mil mais uma unidade de mil; isto é:

$$250000 = 3000 \times 83 + 1000, \text{ o. q. e. n. d.}$$

68. *Observação III*. Se em geral o divisor se termina em zeros, suppriimem-se esses zeros no divisor e no dividendo (á direita) um numero igual de algarismos; o quociente d'esta ultima divisão é o mesmo que o da primeira; porém o resto será igual ao resto da outra augmentado do numero formado dos algarismos separados no dividendo. Seja 347892 um numero que queremos dividir por 9000; o quociente da divisão de 347892 por 9000 será igual ao quociente da divisão de 347 por 9.

Com effeito $347 = 9 \times 38 + 5$; isto é, 347 unidades de mil igualão 38 vezes 9 unidades de mil mais 5 unidades de mil; isto é:

$$347000 = 9000 \times 38 + 5000$$

e por conseguinte

$$347892 = 9000 \times 38 + 5892.$$

5892 é o resto d'esta ultima divisão, por isso que $5892 < 9000$.

69. *Observação IV.* Na pratica quando se trata da divisão de um numero de muitos algarismos por outro de um só algarismo, não se escrevem os differentes dividendos parciaes : faz-se esta operação mentalmente escrevendo debaixo dos algarismos do dividendo os algarismos do quociente.

Eis o typo d'esta operação :

347640943857	7
49662991979	4

na qual 347640943857 é o dividendo, 7 o divisor, 49662991979 o quociente, e 4 o resto.

70. *Observação V. Numero dos algarismos do quociente.*

Dos raciocinios que fizemos na theoria da divisão a este respeito é facil concluir-se o seguinte :

Logo que o primeiro algarismo do dividendo é menor que o primeiro algarismo do divisor, o numero dos algarimos do quociente é igual á differença entre o numero dos algarismos do dividendo, e o dos algarismos do divisor; e se é maior, o numero dos algarismos do quociente é igual á essa differença mais um.

Se n representa o numero dos algarismos do dividendo, e n' o dos algarismos do divisor; no primeiro caso o numero dos algarismos do quociente será $n - n'$ e no segundo $n - n' + 1$.

71. *Observação VI.* Se o dividendo e o divisor são numeros compostos de muitos algarismos e o quociente devendo conter muitos algarismos, abrevia-se a operação, fazendo-se á parte uma taboa dos productos do divisor pelos nove primeiros algarismos da serie natural dos numeros; o que permitte ver facilmente qual o multiplo do divisor que é contido em cada

dividendo parcial e por conseguinte qual o algarismo do quociente :

```
37976043028753243 | 673
 3365             |------------------
 ----             | 56427998856839
  4326            |
  4038            |
  ----            |
   2880           |
   2692           |
   ----           |
    1884          |
    1346          |
    ----          |
     5383         |
     4711         |      1. . . . .  673
     ----         |
      6720        |
      6057        |      2. . . . . 1346
      ----
       6632
       6057              3. . . . . 2019
       ----
        5758
        5384             4. . . . . 2692
        ----
         3747
         3365            5. . . . . 3365
         ----
          4603
          4038           6. . . . . 4038
          ----
           5652
           5384          7. . . . . 4711
           ----
            2684
            2019         8. . . . . 5384
            ----
             6653
             6057        9. . . . . 6057
             ----
              596
```


EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *Tendo-se effectuado uma divisão, se se toma por divisor o quociente achado, trata-se de demonstrar :*

1° *Em que caso o novo quociente é igual ao divisor da primeira operação;*

2° *Se não forem iguaes, determinar o novo quociente e o novo resto sem effectuar a segunda operação.*

Solução. Sejão n o dividendo, d o divisor, q o quociente, e r o resto de uma divisão, de maneira que :

$$n = d \times q + r;$$

é claro que podemos indicar esta igualdade tomando d por divisor da seguinte maneira :

$$\frac{n}{d} = q + \frac{r}{d},$$

por isso que o resto de uma divisão é a razão do numero inteiro r ao divisor d ; tomando q por divisor, podemos tambem pôr :

$$\frac{n}{q} = d + \frac{r}{q};$$

na ultima igualdade para que d seja o quociente da divisão de n por q, é necessario que $r < q$: assim tomando q por divisor teremos d por quociente, se o resto r achado na primeira operação fôr menor que o quociente achado.

Dividindo por exemplo 311 por 52, achamos :

$$311 = 52 \times 5 + 51 \quad (1);$$

o resto 51 da divisão sendo maior que o quociente achado 5, se dividirmos 311 por 5, não teremos 52 por quociente: com effeito, effectuando esta divisão achamos :

$$311 = 5 \times 62 + 1 \quad (2).$$

É facil obter-se o quociente 62 d'esta nova divisão sem effectuar a operação: com effeito, podemos escrever a igualdade (1) tomando por divisor 5 do modo seguinte :

$$\frac{311}{5} = 52 + \frac{51}{5};$$

porém

$$\frac{51}{5} = 10 + \frac{1}{5}$$

logo

$$\frac{311}{5} = 52 + 10 + \frac{1}{5}$$

ou

$$\frac{311}{5} = 62 + \frac{1}{5}$$

o que pode-se escrever :

$$311 = 62 \times 5 + 1.$$

II. *A somma de dous numeros é* 58; *sua differença* 16. *Determinar esses numeros.*

Solução. Sabemos que a somma de dous numeros, junta á sua differença, dá um numero dobro do maior, assim ,

$$\frac{58 + 16}{2} = \frac{74}{2} = 37$$

é o maior d'elles; é claro que o outro será $58 - 37 = 21$, numero que se podia obter empregando o seguinte theorema; *se da somma de dous numeros se subtrahe a sua differença, obtem-se um numero que é dobro do menor, assim ,*

$$\frac{58 - 16}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

é o mesmo numero ainda ha pouco determinado. Verificamos o novo resultado, vendo que $37 - 21 = 16$, que é justamente a differença dada.

III. Achar um numero tal que a somma dos seos algarismos,

tomados com seos valores absolutos seja 12, e que a differença entre o numero inverso, e o numero dado seja 54.

Solução. Supponhamos que a representa o algarismo das dezenas, b o das unidades, de maneira que o numero proposto será $a \times 10 + b$, e o inverso $b \times 10 + a$.

A primeira condição do problema é :

$$b + a = 12,$$

e a segunda :

$$b \times 10 + a - a \times 10 - b = 54,$$

igualdade que podemos escrever :

$$10 \times b - b + a - 10 \times a = 54,$$

ou

$$9b - 9a = 54,$$

ou

$$9(b - a) = 54;$$

d'onde :

$$b - a = \frac{54}{9} = 6.$$

Temos emfim a somma e a differença de duas quantidades :

$$b + a = 12,$$

$$b - a = 6;$$

d'onde se tira :

$$b = \frac{12 + 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

e

$$a = \frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Assim o numero buscado é 39 : com effeito $3 + 9 = 12$ e $93 - 39 = 54$.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

IV. *Em que caso o resto de uma divisão fica o mesmo quando se divide o dividendo pelo divisor?*

V. *Achar um numero tal que a somma dos seos algarismos, tomados com seos valores absolutos, seja* 12, *e que a differença entre o numero inverso e o dado seja* 18.

VI. *A distancia da terra ao sol é pouco mais ou menos* 38000000 *de leguas de* 4000 *metros cada uma ; que tempo seria necessario ao som que percorre* 340^m *por segundo, para vir do sol á terra, se existisse uma atmosphera para transmittil-o?*

VII. *A estrella que se acha mais perto da terra está a uma distancia* 226665 *vezes maior que a da terra ao sol; achar o tempo que emprega a luz para vir d'esta estrella a nós, sabendo que a luz nos vem do sol em* 8^m 18^s.

VIII. *A distancia da lua á terra é de* 83199000 *metros, pergunta-se o tempo que empregaria o som para vir da lua á terra, sabendo que o som percorre* 340 *metros em um segundo.*

IX. *Quantos dias se empregaria para andar á roda da terra, que é de* 9000 *leguas, andando dia e noite uma legua por hora?*

X. *A luz do sol emprega* 8^m 18^s *para chegar á terra, a distancia do sol á terra é de* 38000000 *de leguas ; pergunta-se o espaço percorrido pela luz em um segundo, ou a velocidade da luz.*

XI. *Suppondo que a bala de uma peça d'artilheria faça uma legua em* 20 *segundos, e que seo movimento continue indefinidamente, pergunta-se o tempo em horas, minutos e segundos, que empregaria a bala para ir da terra ao sol; isto é, a percorrer um espaço de* 38000000 *de leguas.*

XII. *Dous correios vão ao encontro um do outro: a distancia que os separa é de* 125 *leguas ; um d'elles que anda* 4 *leguas por hora parte ao meio dia, e o outro que anda* 3, *parte* 5 *horas de-*

pois do primeiro. Quando, e a que distancia dos dous pontos de partida terá lugar o encontro?

XIII. *Dous correios vão ao encontro um do outro: a distancia que os separa é de 120 leguas; um anda 3 leguas por hora, e o outro 2. Quando, e a que distancia dos dous pontos de partida terá lugar o encontro?*

XIV. *Dividir 40000 reis entre 3 pessoas, de maniera que a primeira tenha o dobro da segunda, e a segunda o triplo da terceira.*

XV. *Dividir 36000 reis entre 10 pessoas, de maneira que cada uma das duas primeiras tenha o quintuplo de cada uma das outras.*

XVI. *Deo-se um tiro de peça em Villijuif: um observador collocado em Montery, a uma distancia de 18612 metros da peça, ouve o tiro 5 minutos 4 segundos depois de ter visto a inflammação da polvora. Pergunta-se o espaço que o som percorre no ar em um segundo, sabendo-se que o estrondo da explosão acompanha a inflammação da polvora, e que a velocidade da luz pode ser considerada como infinitamente grande na superficie da terra* (1).

XVII. *Um pae tem 48 annos e seo filho 8: d'aqui ha quantos annos a idade do pae será quintuplo da do filho?*

XVIII. *O quociente de dous numeros é 18, e sua somma 1121. Determinar esses numeros.*

XIX. *Dividir 256 em duas partes, de maneira que o quociente da divisão da primeira pela segunda seja 31.*

XX. *Derminar dous numeros que tenhão por differença 684 e por quociente 37.*

(1) Foi esta a experiencia que fizerão François Arago, e Gay-Lussac, sabios francezes, em uma noite do mez de junho de 1822, para determinar a velocidade do som no ar.

LIVRO II.

Propriedades elementares dos numeros.

—o—

CAPITULO PRIMEIRO.

THEOREMAS RELATIVOS ÁS QUATRO OPERAÇÕES. POTENCIAS. — THEOREMAS RELATIVOS ÁS POTENCIAS.

Theoremas relativos á multiplicação.

72. THEOREMA I. *O producto de muitos numeros é sempre o mesmo, qualquer que seja sua ordem, quando se effectua a multiplicação.*

Este theorema já foi demonstrado no caso particular de dous factores: a demonstracção geral se divide em tres partes, que vamos examinar.

I. *Em um producto de muitos factores, pode-se inverter a ordem dos dous ultimos sem alterar o valor do producto.*

Trata-se de demonstrar que :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4.$$

Effectuando o producto dos numeros que precedem os que queremos mudar de lugar, o que é possivel, temos :

$$6 \times 4 \times 5 = 6 \times 5 \times 4.$$

Escrevamos em uma linha horizontal 4 vezes o numero 6, e repetamos essa linha 5 vezes :

6 6 6 6
6 6 6 6
6 6 6 6
6 6 6 6
6 6 6 6

Cada linha horizontal contem 6×4 unidades; e como ha 5 linhas horizontaes, o quadro acima comtem $6 \times 4 \times 5$ unidades ; cada linha vertical contem 6×5 unidades; e como ha 4 d'essas linhas, segue-se que o quadro contem $6 \times 5 \times 4$ unidades, logo :

$$6 \times 4 \times 5 = 6 \times 5 \times 4.$$

ou :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4,$$

substituindo a 6 os factores, que o formarão.

II. *Em um producto de muitos factores, pode-se inverter a ordem de dous factores consecutivos quaesquer sem alterar o producto.*

Trata-se de demonstrar que :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 4 \times 3 \times 5.$$

Considerando somente os tres primeiros factores, sabemos que :

$$2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3.$$

logo :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 4 \times 3 \times 5.$$

o. q. e. n. d.

III. *Em um producto de muitos factores pode-se inverter, como se quizer, a ordem dos factores sem alterar o producto.*

Com effeito, invertendo successivamente a ordem de dous factores consecutivos, poderemos conduzir um d'elles ao logar que quizermos no producto, e transtornar por conseguinte sua ordem, sem alteração do producto.

73. THEOREMA II. *Para multiplicar um producto de muitos factores por um numero, basta multiplicar um dos factores do producto por esse numero, conservando os outros factores.*

Sejá $2 \times 4 \times 5 \times 3$ o producto que queremos multiplicar por 7; bastará multiplicar por 7 um dos factores do producto, ou 2, ou 4, ou 5, ou 3, conservando os outros.

Introduzir um factor 7 em um producto é tornal-o 7 vezes maior; porém faz-se um producto 7 vezes maior, fazendo um dos factores 7 vezes maior (nº 52), logo basta multiplicar por 7 um dos factores, conservando os outros, *o. q. e. n. d.*

Corollarios dos theoremas precedentes.

74. COROLLARIO I. *Em um producto de muitos factores, pode substituir-se a um certo numero d'elles seo producto effectuado, e reciprocamente.*

Sejá $7 \times 11 \times 6 \times 4 \times 5 \times 9$ o producto, no qual queremos substituir aos factores 6×4 seo producto effectuado 24.

Com effeito :

$$7 \times 11 \times 6 \times 4 \times 5 \times 9 = 6 \times 4 \times 7 \times 11 \times 5 \times 9 \text{ (nº 72).}$$

porém ;

$$6 \times 4 \times 7 \times 11 \times 5 \times 9 = 24 \times 7 \times 11 \times 9 \text{ (nº 51).}$$

logo :

$$7 \times 11 \times 6 \times 4 \times 5 \times 9 = 24 \times 7 \times 11 \times 9.\ o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Assim como reunimos dous factores em um só, podemos reunir tres, quatro, etc, em um só ; porque a reunião de dous

forma um numero que é considerado no n°, o producto como um factor, que pode em virtude da prim' a parte do corollario, ser reunido a outro, que será um terceiro numero no producto primitivo; e assim successivamente.

A proposição inversa é clara, e a demonstracção facil.

Applicação. Seja proposto effectuar o producto.

$$20 \times 15 \times 5 \times 4 \times 25.$$

Se fôssemos a effectuar esse calculo, seguindo a ordem dos factores, a operação seria muito longa; porém se notarmos que $20 \times 5 = 100$, $25 \times 4 = 100$, e $15 \times 4 = 60$, o producto toma logo outra forma muito mais simples :

$$100 \times 100 \times 60 = 600000.$$

75. Corollario II. *O producto de duas ou mais expressões compostas de muitos factores, contem todos os factores, que entrão n'essas expressões :*

Assim :

$$(4 \times 21 \times 7 \times 16) \times (6 \times 8 \times 9 \times 25). =$$
$$= 4 \times 21 \times 7 \times 16 \times 6 \times 8 \times 9 \times 25.$$

Com effeito :

$$(4 \times 21 \times 7 \times 16) \times (6 \times 8 \times 9 \times 25) =$$
$$(4 \times 21 \times 7 \times 16) \times 6 \times 8 \times 9 \times 25 \text{ (n° 7).}$$

Para effectuarmos as operações marcadas no segundo membro, deveriamos mulitiplicar o numero $(4 \times 21 \times 7 \times 16)$, considerado como um producto effectuado por cada factor successivamente do segundo producto, 6, 8, etc. ; porém antes de passar á multiplicação por esses factores, teriamos d'effectuar o primeiro producto; assim vemos que se não o effectuarmos, e se pelo contrario o considerarmos decomposto em seos differentes algarismos, teremos uma expressão,

$$4 \times 21 \times 7 \times 16 \times 6 \times 8 \times 9 \times 25$$

que será igual ao producto das expressões dadas, e que contem todos os factores, que n'ellas entrão.

O que dissémos sobre dous factores applica-se facilmente a quantos factores quizermos.

76. THEOREMA III. *Para multiplicar um numero por um producto de muitos factores, basta multiplicar esse numero por cada factor successivamente.*

Por exemplo, para multiplicar 7 por 24, 24 sendo o producto de 2. 3. 4, basta multiplicar 7 por 2, o resultado por 3, o novo resultado por 4; com effeito.

$$7 \times 24 = 24 \times 7$$

Podemos decompôr 24 em seos factores 2. 3. 4, e escrever no segundo membro em lugar de 24 esses factores, por isso que antes de passar á multiplicação pelo numero 7, ter-se-hia d'effectuar o producto d'esses factores ; assim :

$$7 \times 24 = 2 \times 3 \times 4 \times 7$$

ou

$$7 \times 24 = 7 \times 2 \times 3 \times 4 \quad (\text{n}^\text{o}\ 72).$$

o. q. e. n. d.

77. THEOREMA IV. *Para multiplicar uma somma por um numero, basta multiplicar por esse numero cada parte da somma e ajuntar os productos.*

Seja $4+7+5+9$ a somma, e 3 o numero dado.

Em virtude da definição da multiplicação :

$$(4+7+5+9) \times 3 =$$
$$= 4+7+5+9+4+7+5+9+4+7+5+9.$$
$$= 4+4+4+7+7+7+5+5+5+9+9+9.$$
$$= 4 \times 3 + 7 \times 3 + 5 \times 3 + 9 \times 3.$$

o. q. e. n. d.

78. COROLLARIO. *Para multiplicar um numero por uma somma, basta multiplicar esse numero por cada parte da somma e ajuntar os productos.*

Seja 4 o numero, e $(3+7+9)$ a somma dada.

Considerando a somma como effectuada :

$$4 \times (3+7+9) = (3+7+9) \times 4 \quad (n^o\ 72).$$
$$= 3 \times 4 + 7 \times 4 + 9 \times 4 \quad (n^o\ 77).$$
$$= 4 \times 3 + 4 \times 7 + 4 \times 9 \quad (n^o\ 72).$$

o. q. e. n. d.

79. Theorema V. *Para multiplicar duas sommas basta multiplicar cada uma das partes do multiplicando por cada parte do multiplicador.*

Sejão $(4+5+6)$ e $(7+3+9)$ as duas sommas.

Considerando a segunda como effectuada e applicando o theorema precedente :

$$(4+5+6) \times (7+3+9) =$$
$$= 4 \times (7+3+9) + 5 \times (7+3+9) + 6 \times (7+3+9).$$

Porém em virtude do corollario (nº 77),

$$4 \times (7+3+9) = 4 \times 7 + 4 \times 3 + 4 \times 9,$$
$$5 \times (7+3+9) = 5 \times 7 + 5 \times 3 + 5 \times 9,$$
$$6 \times (7+3+9) = 6 \times 7 + 6 \times 3 + 6 \times 9,$$

logo :

$$(4+5+6) \times (7+3+9) = 4 \times 7 + 4 \times 3 + 4 \times 9 +$$
$$+ 5 \times 7 + 5 \times 3 + 5 \times 9 + 6 \times 7 + 6 \times 3 + 6 \times 9.$$

o. q. e. n. d.

80. Theorema VI. *Para multiplicar a differença de dous numeros por um terceiro, basta multiplicar esses dous numeros pelo terceiro, e subtrahir o menor producto do maior.*

Assim, por exemplo :

$$(7-4) \times 3 = 7 \times 3 - 4 \times 3.$$

Ora $(7-4) \times 3$ sendo a somma de tres quantidades iguaes a $(7-4)$, temos :

$$\begin{array}{c} 7 - 4 \\ 7 - 4 \\ 7 - 4 \\ \hline 7 \times 3 - 4 \times 3 \end{array}$$

o. q. e. n. d.

81. Corollario I. *Para multiplicar um numero pela differença de dous outros, basta multiplicar o primeiro por cada um dos dous outros, e diminuir o menor resultado do maior.*

Assim :

$$7 \times (13 - 4) = 7 \times 13 - 7 \times 4.$$

Com effeito :

$$\begin{aligned} 7 \times (13 - 4) &= (13 - 4) \times 7 = 13 \times 7 - 4 \times 7 = \quad (\text{n}^\text{o}\ 80). \\ &= 7 \times 13 - 7 \times 4 \quad (\text{n}^\text{o}\ 72). \end{aligned}$$

o. q. e. n. d.

82. Corollario II. *Logo que se augmenta ou diminue de um numero um dos factores de um producto, este augmenta ou diminue do producto do outro factor por esse numero.*

Ora :

$$7 \times 4 = 28,$$

logo,

$$\begin{aligned} (7 \pm 3) \times 4 &= 7 \times 4 \pm 3 \times 4 \quad (\text{n}^\text{os}\ 77, 80). \\ &= 28 \pm 3 \times 4; \end{aligned}$$

assim, ajuntando ou diminuindo o multiplicando 7 de 3 unidades, o producto 28 augmenta ou diminue do producto de 3 pelo outro factor 4, *o. q. e. n. d.*

Theoremas relativos á divisão.

83. THEOREMA I. *Para dividir um numero por um producto de muitos factores basta dividil-o por cada factor successivamente.*

Seja 1155 o numero e $3 \times 11 \times 5$ o producto dado, vamos demonstrar que basta dividir 1155 por 3, o quociente por 11, e o novo quociente por 5.

O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente, e 385 sendo o quociente de 1155 por 3, temos :

$$1155 = 3 \times 385 ;$$

35 sendo o quociente de 385 por 11

$$385 = 11 \times 35 ; \qquad (2)$$

e emfim 7 sendo o quociente de 35 por 5

$$35 = 5 \times 7 ; \qquad (3)$$

7 será o quociente da divisão de 165 pelo producto effectuado 3. 11. 5.

Se na primeira igualdade em lugar de 385 escrevermos seo valor dado pela segunda, e n'esta em lugar de 35 seo valor dado pela terceira, temos :

$$1185 = 3 \times 11 \times 5 \times 7$$

ou

$$165 = 3.\ 11.\ 5 \times 7 \qquad (\text{n}^\circ\ 74).$$

o. q. e. n. d.

DEMONSTRAÇÃO GERAL D'ESTE THEOREMA.

I. *As differentes divisões se fazem sem resto.*

Seja N o numero, e $a \times b \times c \times d$ o producto.

Representemos por q, q', q'' e Q os quocientes successivos, de sorte que :

$$N = a \times q,\ \ q = b \times q',\ \ q' = c \times q'',\ \ q'' = d \times Q\ ;$$

Q será o quociente da divisão de N por $a \times b \times c \times d$. Se na primeira igualdade em lugar de q escrevermos seo valor dado pela segunda ; se n'esta em lugar de q' escrevermos seo valor dado pela terciera ; e emfim se n'esta em lugar de q'' seo valor dado pela ultima, teremos :

$$N = a \times b \times c \times d \times Q$$

ou

$$N = a.\ b.\ c.\ d \times Q \qquad (\text{nº } 74).$$

o. q. e. n. d.

II. *As differentes divisões não se fazem exactamente.*

Conservando as mesmas annotações, e representando r, r', r'', R os restos das divisões successivas, teremos :

$$N = a \times q + r,\ \ q = b \times q' + r'\ \ q' = c \times q'' + r'',\ \ q'' = d \times Q + R,$$

Se no segundo membro de cada igualdade substituirmos ao q, que ahi se acha, seo valor dado pela igualdade seguinte, teremos successivamente :

$$\begin{aligned} N &= a \times (b \times q' + r') + r \\ &= a \times b \times q' + a \times r' + r \\ &= a \times b \times (c \times q'' + r'') + a \times r' + r \\ &= a \times b \times c \times q'' + a \times b \times r'' + a \times r' + r \\ &= a \times b \times c \times (d \times Q + R) + a \times b \times r'' + a \times r' + r \\ &= a \times b \times c \times d \times Q + a \times b \times c \times R + a \times b \times r'' + \\ &\quad + a \times r' + r, \end{aligned}$$

e pondo $a \times b \times c \times d = a.\ b.\ c.\ d$, o que é possivel, temos :

$$\begin{aligned} N = a.\ b.\ c.\ d \times Q + a \times b \times c \times R + a \times b \times c \times r'' + \\ + a \times r' + r. \end{aligned}$$

Pela igualdade ultima ve-se que Q será o quociente de $a. b. c. d.$ por N, se

$$a \times b \times c \times R + a \times b \times r'' + a \times r' + r < a \times b \times c \times d.$$

Ora o resto de uma divisão é sempre menor que o divisor, e seo valor *maximum* é igual ao divisor menos um; por conseguinte

$$max.\ R. = d - 1,\ max.\ r'' = c - 1,\ max.\ r' = b - 1,$$
$$max.\ r = a - 1;$$

ponhamos :

$$\rho = a \times b \times c \times R + a \times b \times r'' \times a \times r' + r;$$

substituindo n'esta expressão a cada uma das quantidades seo valor maximum,

$$max.\ \rho = a \times b \times c \times (d-1) + a \times b \times (c-1) +$$
$$+ a \times (b-1) + a - 1;$$

effectuando as multiplicações,

$$max.\ \rho = a \times b \times c \times d - a \times b \times c + a \times b \times c - a \times b +$$
$$+ a \times b - a + a - 1;$$

e observando que

$$-a \times b \times c + a \times b \times c = o, -a \times b + a \times b = o, -a + a = o$$

temos emfim :

$$max.\ \rho = a \times b \times c \times d - 1,$$
ou $\quad max.\ \rho < a \times b \times c \times d.$ *o. q. e. n. d.*

84. Theorema II. *Para dividir um producto de muitos factores por um numero, basta dividir por esse numero um dos factores, conservando os outros.*

Assim, para dividir $4 \times 33 \times 27$ por 11, basta dividir por 11 um dos factores; por exemplo 33, conservando os outros; isto é,

$$\frac{4 \times 33 \times 27}{11} = 4 \times 3 \times 27:$$

Com effeito, o dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente, temos

$$4 \times 33 \times 27 = 11 \times 4 \times 3 \times 27$$

ou

$$4 \times 33 \times 27 = 4 \times 33 \times 27 \qquad (\text{n}^\circ\ 74)$$

o. q. e. n. d.

85. Theorema III. *Logo que se multiplica ou divide o dividendo e o divisor por um mesmo numero, o quociente nunca muda; porém o resto é sempre multiplicado ou dividido por esse nnmero.*

Seja D o dividendo, d o divisor, Q o quociente, e R o resto, de sorte que:

$$D = d \times Q + R$$

sendo n o factor proposto, e multiplicando a igualdade supra por n, temos:

$$D \times n = d \times Q \times n + R \times n, \qquad (\text{n}^\circ\ 77)$$

ou

$$D \times n = d \times n \times Q + R \times n, \qquad (\text{n}^\circ\ 72)$$

ou

$$D \times n = d.n \times Q + R \times n \qquad (\text{n}^\circ\ 74)$$

$R \times n$ é o resto da divisão, por isso que R sendo menor que d, $R.n < n.d$.

o. q. e. n. d.

A demonstração da segunda parte do theorema é identica á da primeira.

86. Theorema IV. *Para dividir uma somma por um numero, basta dividir cada parte da somma por esse numero e ajuntar os quocientes.*

Assim:

$$\frac{a+b+c+d}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n},$$

O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente:

$$a+b+c+d=\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}\right)\times n$$
$$=\frac{a}{n}\times n+\frac{b}{n}\times n+\frac{c}{n}\times n+\frac{d}{n}\times n \text{ (n° 77)},$$

e notando que $\frac{a}{n}$ é o quociente de a por n, que $\frac{b}{n}$ é o quociente de b por n, etc., e que um quociente torna-se n vezes maior, fazendo-se n vezes maior o dividendo, isto é, multiplicando por n, os dividendos a, b, etc., temos:

$$a+b+c+d=\frac{a\times n}{n}+\frac{b\times n}{n}+\frac{c+n}{n}+\frac{d\times n}{n},$$

ou $$a+b+c+d=a+b+c+d$$

o. q. e. n. d.

É facil demonstrar-se que:

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

87. COROLLARIO. *Se ao dividendo ajuntarmos ou diminuirmos* n *vezes o divisor, o resto da divisão fica o mesmo, porém o quociente augmenta ou diminue de* n.

Seja D o dividendo, d o divisor, Q o quociente, R o resto de uma divisão, de maneira que:

$$D=d\times Q+R;$$

ajuntando aos dous membros da igualdade acima n vezes o divisor, isto é, $n.\ d$:

$$D+n.\ d=n.\ d+d\times Q+R$$

ou $$D+n.\ d=d\,(n+Q)+R; \qquad \text{(n° 78)}$$

pela ultima igualdade vê-se que o resto R ficou o mesmo, e o quociente Q cresceo em n.

Potencias.

88. *Potencia é um producto de muitos factores iguaes.*

O producto de dous numeros iguaes é a *segunda potencia* d'esse numero. O producto de tres numeros iguaes é a *terceira potencia* do numero. O numero de factores iguaes, que entrão no producto, marca o *gráo* da potencia.

Em geral, a potencia de gráo m *de um numero é o producto de* m *factores iguaes á esse numero.*

Para a commodidade da escripta convencionou-se em indicar o gráo da potencia por meio de um pequeno algarismo collocado em cima, e um pouco á direita do numero; a esse algarismo deo-se o nome de *expoente*, assim :

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

lê-se : *cinco elevado a quarta potencia* ou *cinco potencia quatro.*

A segunda e a terceira potencia de um numero receberão os nomes particulares de *quadrado*, e *cubo.*

Todo o numero, que não tem expoente, é considerado como tendo por expoente a unidade.

É preciso notar-se que :

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$
$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$$
$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000000$$

isto é, *uma potencia qualquer de* 10 *é igual á unidade seguida de tantos zeros quantas unidades ha no expoente da potencia.*

Theoremas relativos ás potencias.

89. THEOREMA I. *O producto de duas ou mais potencias de um numero é uma potencia d'esse mesmo numero, cujo expoente é a somma dos expoentes das potencias dadas.*

Assim :

$$4^2 \times 4^3 \times 4^5 = 4^{2+3+5} = 4^{10}.$$

Com effeito,

$$\begin{aligned} 4^2 &= 4 \times 4 \\ 4^3 &= 4 \times 4 \times 4 \\ 4^5 &= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4; \end{aligned}$$

e multiplicando todas estas igualdades membro a membro :

$$4^2 \times 4^3 \times 4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{10}$$

o. q. e. n. d.

90. COROLLARIO. *Para elevar uma potencia de um numero a uma outra potencia, basta multiplicar o expoente da primeira pelo expoente da segunda.*

Assim :

$$(7^5)^3 = 7^{5 \times 3} = 7^{15};$$

com effeito,

$$\begin{aligned} (7^5)^3 &= 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \\ &= 7^{5+5+5} = 7^{5 \times 3} = 7^{15} \end{aligned}$$

o. q. e. n. d.

91. THEOREMA II. *O quociente de duas potencias de um mesmo numero é uma potencia d'esse mesmo numero, cujo expoente é a differença entre os expoentes das potencias dadas.*

Assim:

$$\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2;$$

com effeito, o dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente,

$$7^5 = 7^3 \times 7^2$$

ou

$$7^5 = 7^5 \qquad o.\,q.\,e.\,n\,d.$$

92. THEOREMA III. *Para elevar um producto a uma potencia, basta elevar cada factor do producto a essa potencia.*

Seja o producto $5 \times 7 \times 4$, que quer-se elevar a 3ª potencia:

$$(6 \times 7 \times 4)^3 = 6 \times 7 \times 4 \times 6 \times 7 \times 4 \times 6 \times 7 \times 4 =$$
$$= 6 \times 6 \times 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 7 \times 7 \times 7 =$$
$$= 6^3 \times 4^3 \times 7^3.$$

o. q. e. n. d.

93. COROLLARIO. *Para elevar a uma potencia um producto de muitas potencias basta multiplicar o expoente de cada factor pelo expoente da potencia.*

Seja o producto $3^4 \times 5^6 \times 7^3$ que se quer elevar á 3ª potencia:

$$(3^4 \times 5^6 \times 7^3)^3 = 3^4 \times 5^6 \times 7^3 \times 3^4 \times 5^6 \times 7^3 \times 3^4 \times 5^6 \times 7^3 =$$
$$= 3^4 \times 3^4 \times 3^4 \times 5^6 \times 5^6 \times 5^6 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 =$$
$$= 3^{12} \times 5^{18} \times 7^9.$$

o. q. e n. d.

Numero dos algarismos em um producto de muitos factores.

94. THEOREMA. *O numero dos algarismos em um producto de muitos factores é ao maximum igual ao numero dos algarismos de todos os factores. e ao minimum igual a esse mesmo numero diminuido de tantas unidades, quantos são os factores menos um.*

Seja $a \times b \times c \times d$ o producto, e m, m', m'' e m''' o numero de algarismos de cada um dos factores.

I. Por isso que a tem m algarismos, a é por conseguinte menor que 10^m, e fazendo o mesmo raciocinio sobre os outros factores, temos:

$$a < 10^{m},$$
$$b < 10^{m'},$$
$$c < 10^{m''},$$
$$d < 10^{m'''};$$

e por conseguinte, fazendo o producto:

$$a \times b \times c \times d < 10^{m + m' + m'' + m'''}$$

porém $10^{m + m' + m'' + m'''}$ é o menor numero possivel de $m + m' + m'' + 1$ algarismos, logo o producto $a \times b \times c \times d$, que ainda é menor que aquella potencia, contem quando muito $m + m' + m'' + m'''$ algarismos. *o. q. e. n. d.*

II. O factor a tendo m algarismos é maior que $10^m - 1$, e dizendo o mesmo dos outros, temos:

$$a > 10^{m-1}$$
$$b > 10^{m'-1}$$
$$c > 10^{m''-1}$$
$$d > 10^{m'''-1}$$

e por conseguinte, fazendo o producto:

$$a \times b \times c \times d > 10^{m + m' + m'' + m''' - 4};$$

porém $10^{m + m' + m'' + m''' - 4}$ é o menor numero possivel de $m + m' + m'' + m''' - 3$ algarismos, logo o producto $a \times b \times c \times d$, que ainda é maior que aquella potencia de 10, tem quando menos $m + m' + m'' + m''' - 3$ algarismos; isto é um numero igual ao precedente diminuido de tantas unidades quantos factores ha menos um. *o. q. e. n. d.*

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *O producto dos numeros inteiros a partir de* n *até* $(2n-2)$ *inferior de duas unidades ao dobro de* n *é igual ao producto dos numeros impares desde* 1 *até* $(2n-3)$ *pela potencia de* 2 *de gráo* $(n-1)$.

Trata-se pois de verificar a seguinte igualdade

$$n.(n+1).(n+2).....(2n-2)=1.2.3.5.7......(2n-3)\,2.^{n-1}$$

Completemos a serie supra, multiplicando e dividindo por $1.\,2.\,3...\,(n-1)$, teremos

$$n.(n+1)\,(n+2).....(2n-2)=$$
$$=\frac{1.2.3.4......(n-1)\,n\,(n+1).....(2n-3)\,(2n-2)}{1.2.3.\,.....\,(n-1)}$$

Separemos o numerador em duas series, uma formada de numeros impares, a outra de numeros pares, observando que o ultimo factor $(2n-2)$ sendo um numero par, $2n-3$ que o precede immediatamente é impar :

$$n\,(n+1)\,(n+2).....(2n-2)=$$
$$=\frac{1.3.5.7......(2n-3)\times 2.4.6.8......(2n-2)}{1.2.3.\,.....\,(n-1)}$$

A segunda serie de numeros pares encerra $(n-1)$ factores, que são todos divisiveis por 2; podemos pois substituir a esta serie a expressão $1.\,2.\,3.\,5...\,(n-1)\times 2^{n-1}$, e teremos

$$n\,(n+1)\,(n+2).....(2n-2)=$$
$$=\frac{1.3.5.7......(2n-3)\times 1.2.3.4......(n-1)\times 2^{n-1}}{1.2.3.4.\,.....\,(n-1)}$$

ou emfim

$$n.(n+1).(n+2).....(2n-2)=1.3.5.7......(2n-3)\times 2.^{n-1}$$

o. q. e. n. d.

II. *Achar um numero que sendo multiplicado successivamente por* 200 *e por* 5, *um dos productos obtidos seja o quadrado do outro :*

Seja N o numero que se procura, de maneira que :

$$200\times N=(5\times N)^2$$

ou

$$200\times N=25\times N^2\,;$$

é claro que dividindo duas quantitades iguaes por uma mesma quantidade N, os restos são iguaes :

$$200=25\times N$$

d'onde se deduz

$$N=\frac{200}{25}=8.$$

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

III. *Determinar tres numeros taes que as sommas d'esses numeros tomados dous a dous sejão* 12, 16 *e* 18.

IV. *Determinar quatro numeros taes que as sommas d'esses numeros tomados tres a tres sejão* 15, 19, 21 *e* 23.

V. *Achar tres numeros taes que as sommas de dous quaesquer excedão o outro de* 3, 11 *e* 19.

VI. *Achar quatro numeros taes que as sommas de tres quaesquer excedaõ o outro dos numeros* 8, 16, 24, 28.

VII. *Se dous numeros não terminão em zero ou* 5, *a differença de suas quartas potencias terminão em* 0 *ou* 5.

VIII. *Demonstrar que todo numero é uma somma de potencias de* 2, *ou uma somma de potencias de* 2 *mais um.*

IX. *Qual é o numero que diminuindo 10 de sua septima parte, o triplo do resto seja 24?*

X. *Determinar um numero de tres algarismos, que cresce em 270 unidades logo que se inverte a ordem dos seos dous primeiros algarismos á esquerda, que diminue de 396 logo que se inverte a ordem dos ultimos á direita e taes que a somma d'elles considerados como exprimindo unidades simples, é igual a 17.*

CAPITULO II.

O

THEORIA DOS MULTIPLOS. — THEORIA DOS RESTOS. — DIVISIBILIDADE. — PROVAS.

Multiplos.

95. Os productos de um numero pela serie natural dos numeros chamão-se *multiplos* d'esse numero.

Assim,

$$7 \times 2,\ 7 \times 3,\ 7 \times 4 \ldots,\ 7 \times n,$$

são os differentes multiplos de 7.

Em geral, chama-se multiplo de um numero o producto d'este numero por outro.

Uma divisão entre dous numeros pode ser feita sem resto ou com resto. No primeiro caso, o primeiro numero é *divisivel* pelo segundo, e este é *divisor* ou *factor* do primeiro; e como o dividendo é o producto do divisor pelo quociente, o dividendo é por conseguinte um *multiplo* do divisor, que é ainda chamado *submultiplo* do primeiro.

As palavras, *divisor*, *factor* e *submultiplo* significão a mesma cousa.

No segundo caso; isto é, quando a operação não se faz exac-

tamente, ella tem por fim procurar o maior multiplo do divisor, contido no dividendo; isto é, o maior numero de vezes, que elle ahi entra, como ja o dissemos na theoria da divisão; a differença entre o dividendo e o maior multiplo do divisor é o resto da operação.

96. *Observação I.* Todo o numero multiplo de outro é divisivel por este, e reciprocamente.

Assim 24 sendo um multiplo de 3 é divisivel por 3; porque 24, producto dos dous factores, 8×3, é divisivel por um d'elles 3.

Segue-se d'ahi que todo numero sendo multiplo da unidade é divisivel pela unidade ou por si mesmo.

97. *Observação II.* Um multiplo de um producto é multiplo de um de seos factores.

Theoremas relativos aos multiplos e divisores.

98. THEOREMA I. *Todo o numero, divisor de muitos outros, é tambem divisor de sua somma.*

Sabemos que, para dividir uma somma por um numero, basta dividir cada parte da somma por esse numero (nº 86), e como cada uma d'ellas se divide exactamente por hypothese, logo a somma é tambem divisivel pelo numero.

Observação. Este theorema mostra que a somma de muitos numeros, multiplos de outro, é tambem um multiplo d'esse numero.

99. THEOREMA II. *Logo que um numero divide dous outros exactamente, divide sua differença.*

Como para dividir uma differença, basta dividir cada numero, e subtrahir o menor quociente do maior, e por isso que os dous numeros são por hypothese divisiveis pelo numero dado, logo a differença tambem o é.

Observação. Este theorema mostra que a differença entre

dous numeros, multiplos de outro, é tambem um numero, multiplo d'aquelle.

100. Theorema III. *Logo que um numero divide uma somma de duas quantidades e uma d'ellas, divide a outra.*

Porque esta ultima é a differença entre a somma e a outra quantidade, que por hypothese, são divisiveis pelo numero dado.

Corollario. *Logo que em uma divisão um numero divide o dividendo e o divisor, divide o resto.*

Porque o resto sendo uma differença entre dous numeros multiplos de outro, é um multiplo d'este, e é por conseguinte divisivel por elle.

101. Theorema IV. *Logo que uma somma é tal que sendo composta de duas quantidades, das quaes uma só é divisivel por um numero, e a outra não, a somma tambem não é divisivel por esse numero, e o resto da divisão da somma é o mesmo que o resto da divisão da parte não divisivel pelo dito numero.*

Sejão 125 e 324 os dous numeros dados, e taes que um d'elles somente 125 é divisivel por 5.

A somma 125 + 324 não será divisivel por 5 (nº 100). O resto da divisão da somma por 5 é o mesmo que o da divisão de 324 por 5; por isso que:

$$\frac{125+324}{5}=\frac{125}{5}+\frac{324}{5} \text{ (nº 86).}$$

Theoria dos restos. — Divisibilidade.

102. A theoria da divisibilidade é uma consequencia da theoria dos restos; esta ensina os meios para determinar o resto da divisão de um numero qualquer por uma serie d'outros numeros sem effectuar-se a divisão; pelo conhecimento do resto será facil saber, se o primeiro numero é divisivel pelo segundo, basta para isso que o resto seja nullo; é este o objecto da theoria da divisibilidade.

O estudo dos restos, como vamos ver, é uma applicação dos theoremas precedentemente demonstrados.

103. Problema. *Determinar o resto da divisão de um numero qualquer por uma potencia qualquer de* 10.

Seja 4765329 o numero dado, e 10^3 a potencia dada. É claro que :

$$4765329 = 4765000 + 329;$$

4765000 multiplo de mil, é por conseguinte divisivel por 1000; $329 < 1000$, representa o resto da divisão da somma 4765329 por 10^3 (nº 101).

Da mesma forma veriamos que o resto da divisão de 37645 por 10^2 é 45.

Em geral, o resto da divisão de um numero qualquer por 10^n, *é o numero formado pelos* n *primeiros algarismos á direita do numero dado.*

Consequencia. *Para que um numero seja divisivel por* 10^n *é preciso que os* n *primeiros algarismos á sua direita sejão zeros; esta condição é sufficiente.*

104. Problema. *Determinar o resto da divisão de um numero por* 2 *e* 5.

Observemos primeiro que tudo que uma unidade de ordem qualquer é um multiplo de 2 e de 5, por isso que uma unidade de ordem qualquer é um multiplo de 10, e que 10 é um multiplo de 2 e de 5 (nº 97).

Seja 24677 o numero dado.

É claro que :

$$24677 = 24670 + 7;$$

a primeira parte 24670 é divisivel por 2 e por 5, por conseguinte o resto da divisão de 24677 por 2 ou por 5 será o mesmo que o resto da divisão por 2 ou por 5 do ultimo algarismo 7 (nº 101).

Consequencia. *Para que um numero seja divisivel por* 2 *ou*

por 5, é necessario e sufficiente que seo ultimo algarismo á direita seja um numero divisivel por 2 ou por 5.

Os algarismos divisiveis por 2 são os seguintes : 0, 2, 4, 6, 8; logo para que um numero seja divisivel por 2 é necessario e sufficiente que seo ultimo algarismo á direita seja um dos algarismos acima.

Um numero que é divisivel por 2 chama-se numero *par;* numero *impar* aquelle que não é divisivel por 2. Um numero par é representado geralmente por $2n$, n sendo um numero inteiro qualquer, e um numero impar por $2n+1$.

Para que um numero seja divisivel por 5, é necessario e sufficiente que seo ultimo algarismo á direita seja 0 ou 5.

105. Problema. *Determinar o resto da divisão de um numero por 4 ou 25, ou por 2^2 ou 5^2.*

Observemos que as centenas, as unidades de mil, etc., são numeros multiplos de 100, e por conseguinte de 4 e de 25, que são submultiplos de 100 (nº 97).

Seja dado o numero 324696. Podemos escrever :

$$324696 = 324600 + 96$$

a primeira parte 324600 é um numero divisivel por 4 e 25, por consequencia o resto da divisão de 324696 por 4 ou 25 é o mesmo que o resto da divisão por 4 ou 25 do numero 96, formado pelos dous ultimos algarismos do numero dado (nº 101).

Consequencia. *Para que um numero seja divisivel por 4 ou 25, é necessario e é sufficiente que os seos dous ultimos algarismos á direita formem um numero divisivel por 4 ou 25.*

Ver-se-hia da mesma maneira que um numero é divisivel por $8 = 2^3$, ou por $125 = 5^3$, logo que os seos tres ultimos algarismos á direita fórmão um numero divisivel por 8 ou por 125.

106. *Em geral, um numero é divisivel por 2^n, ou por 5^n, logo que os seos* n *ultimos algarismos á direita fórmão um numero divisivel por 2^n ou 5^n.*

107. Problema. *Determinar o resto da divisão de um numero por 9.*

Para resolver este problema, dividamos as differentes potencias de 10 por 9 para observarmos a lei dos restos; achamos que o resto é sempre a unidade, e d'ahi concluimos este theorema: *Uma potencia qualquer de 10 é um multiplo de 9 mais um :*

Deste theorema resulta o seguinte.

Um algarismo significativo seguido de zeros é igual a um multiplo de 9 mais esse algarismo, tomado com seo valor absoluto.

Seja 7000 o numero proposto

$$7000 = 7 \times 1000 = 7 \times (m.\,9 + 1)$$
$$= 7 \times m.\,9 + 7 = m.\,9 + 7$$

o. q. e. n. d.

Passemos agora á resolução do problema, e seja 76436 o numero dado. Pelo que acima demonstrámos

$$\begin{aligned} 70000 &= m.\,9 + 7 \\ 6000 &= m.\,9 + 6 \\ 400 &= m.\,9 + 4 \\ 30 &= m.\,9 + 3 \\ 6 &= \quad\quad 6 \end{aligned}$$

e ajuntando essas igualdades membro a membro, temos :

$$76436 = M.\,9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 6,$$

representando $M.\,9$ a somma dos multiplos acima.

Do exposto resulta o seguinte theorema.

Um numero qualquer é igual a um multiplo de 9 mais a somma dos seos algarismos, tomados com seos valores absolutos.

A solução do problema proposto é uma applicação directa do seguinte theorema.

O resto da divisão de um numero por 9 é igual ao resto da

divisão por 9 da somma dos seos algarismos, tomados com seos valores absolutos.

Fazendo a somma dos algarismos do numero proposto, achamos 26; assim o resto da divisão do numero dado por 9 é o mesmo que o resto da divisão de 26 por 9, e applicando a mesma regra a 26 como ao numero acima, a somma 8 dos seos algarismos, sendo menor que 9, é o resto da divisão.

CONSEQUENCIA. *Um numero será divisivel por 9, logo que a somma dos seos algarismos, tomados com seos valores absolutos, fôr um multiplo de 9.*

108. PROBLEMA. *Determinar o resto da divisão de um numero por 3.*

A solução d'este problema é uma applicação do seguinte theorema.

O resto da divisão de um numero por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da somma dos seos algarismos, tomados com seos valores absolutos.

Com effeito um numero qualquer sendo igual a um multiplo de 9 mais a somma dos seos algarismos, será igual a um multiplo de 3 mais a somma dos seos algarismos, por isso que 9 é um multiplo de 3.

CONSEQUENCIA. *Um numero será divisivel por 3, logo que a somma dos seos algarismos, tomados com seos valores absolutos, fôr um multiplo de 3.*

109. PROBLEMA. *Determinar o resto da divisão de um numero por 11.*

Sigamos a mesma marcha que até aqui; dividamos as differentes potencias de 10 por 11, e observemos a lei dos restos. Tomemos primeiramente as potencias pares de 10.

$$10^2 = 100 = 11 \times 9 + 1 = m.\,11 + 1$$
$$10^4 = 10000 = 11 \times 909 + 1 = m.\,11 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$10^{2m} = 1000000\ldots\ldots = 11 \times 90909\ldots\ldots + 1 = m.\,11 + 1$$

D'aqui o seguinte theorema :

Uma potencia par de 10 é igual a um multiplo de 11 mais um.

Passemos ás potencias impares de 10.

$$10 = 11 - 1$$
$$10^3 = 10^2 \times 10 = (m.11 + 1) \times 10 = m'.11 + 10 =$$
$$= m'.11 + 11 - 1 = m''.11 - 1$$
$$10^5 = 10^4 \times 10 = (m.11 + 1) \times 10 = m'.11 + 1$$

. . . .

. . . .

$$10^{2m+1} = 10^{2m} \times 10 = (M.11 + 1) \times 10 = M'.11 - 1$$

d'ahi o seguinte theorema :

Toda potencia impar de 10 é igual a um multiplo de 11 menos um.

D'estes dous theoremas resultão os dous seguintes, que podemos demonstrar.

Um algarismo significativo seguido de um numero par de zeros é igual a um multiplo de 11 mais esse algarismo.

Seja 70000 o numero dado.

$$70000 = 7 \times 10000 = 7 \times (m.11 + 1) =$$
$$= 7 \times m.11 + 7 = m'.11 + 7.$$

Um algarismo significativo seguido de um numero impar de zeros é igual a um multiplo de 11 menos esse algarismo.

Com effeito ;

$$7000 = 7 \times 1000 = 7 \times (m.11 - 1) = 7 \times m.11 - 7 = m'.11 - 7.$$

o. q. e. n. d.

Passemos á resolução do problema ; seja 7653259 o numero de que buscamos o resto da divisão por 11.

Decompondo o numero dado em suas differentes partes, e empregando sobre ellas os dous theoremas precedentes, temos :

$$\begin{aligned}
7000000 &= \ldots\ldots\ m\ \ .11+7\\
600000 &= \ldots\ldots\ m'\ .11-6\\
50000 &= \ldots\ldots\ m''.11+5\\
3000 &= \ldots\ldots\ m'''.11-3\\
200 &= \ldots\ldots\ m^{\text{iv}}.11+2\\
50 &= \ldots\ldots\ m^{\text{v}}.11-5\\
9 &= \ldots\ldots\ \qquad\quad 9
\end{aligned}$$

Fazendo a somma d'essas igualdades membro a membro; e notando que

$$m.11+m'.11+m''.11+m'''.11+m^{\text{iv}}.11+m^{\text{v}}.11=\text{M}.11$$

isto é, que a somma de um certo numero de multiplos de 11 é um numero multiplo de 11, teremos:

$$\begin{aligned}
7653259 &= M.11+7-6+5-3+2-5+9\\
&= M.11+7+5+2+9-6-3-5\\
&= M.11+7+5+2+9-(6+3+5).
\end{aligned}$$

D'esta ultima igualdade concluimos o seguinte theorema:

Um numero qualquer é igual a um multiplo de 11 augmentado com a somma dos algarismos de ordem impar e diminuido da somma dos algarismos de ordem par.

A solução do novo problema é uma applicação do seguinte theorema, que é uma consequencia d'este e d'outros já conhecidos.

O resto da divisão de um numero por 11 é o mesmo que o resto da divisão por 11 da differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos algarismos de ordem par.

No nosso exemplo, esta differença é 9 : 9, sendo menor que 11, é o resto da divisão do numero proposto por 11.

Se a somma dos algarismos de ordem impar é menor que a outra, ajunta-se á primeira um multiplo de 11 sufficiente, afim de que esta exceda aquella.

Consequencia. *Um numero será divisivel por 11, logo que a*

differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos algarismos de ordem par fôr zero ou um multiplo de 11.

Importa muito ao leitor penetrar-se bem do methodo que aqui temos seguido para chegarmos á solução do problema precedente.

Em geral, para achar-se o resto da divisão de um numero N por outro numero n, divide-se por n a unidade seguida de zeros, e observa-se a lei dos restos: é n'esta lei que o problema acha sua solução. Para melhor gravar-se no espirito o methodo que temos empregado, vamos resolver ainda este outro problema.

111. PROBLEMA. *Determinar o resto da divisão de um numero qualquer por* 7.

Seja 72463295435 o numero dado.

Dividindo as differentes unidades por 7, achamos:

$$
\begin{aligned}
1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1\\
10 &= 7\times1+3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad m.7+3\\
100 &= 7\times14+2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad m.7+2\\
1000 &= 7\times142+6 = m.7+7-1 = \ .\ m.7-1\\
10000 &= 7\times1428+4 = m.7+7-3 = m.7-3\\
100000 &= 7\times14285+5 = m.7+7-2 = m.7-2\\
1000000 &= 7\times142857+1 = \ldots\ldots\ldots \quad m.7+1
\end{aligned}
$$

Examinando as igualdades acima vêmos que uma unidade, dezena, e centena se compõe de um multiplo de 7, augmentado com uma, tres e duas unidades; uma unidade de mil, dezena de mil, e centena de mil se compõe de um multiplo de 7 diminuido de uma, tres e duas unidades; e como, proseguindo a divisão, os mesmos restos se reproduzem, a lei dos restos se acha determinada.

É claro que 2, 3, 4, 5..... unidades de ordem qualquer se compoem de um multiplo de 7, augmentado ou diminuido de uma quantidade 2, 3, 4, 5..... vezes maior que a quantidade que deve ser ajuntada ou diminuida do multiplo de 7, pertencente á unidade da mesma ordem.

Dividamos o numero dado em classes de tres algarismos cada uma, indo da direita para a esquerda : uma qualquer d'essas classes de ordem impar, ou par, será igual a um multiplo de 7, augmentado ou diminuido *de uma vez suas unidades, de tres vezes suas dezenas*, e *de duas vezes suas centenas*. Se multiplicarmos respectivamente por 1, 2, 3 as unidades, dezenas e centenas de cada classe, o numero proposto será igual a um multiplo de 7 augmentado com a somma dos productos, que provêm das classes de ordem par, e diminuido da somma dos productos que provêm das classes de ordem impar; isto é, augmentado ou diminuido da differença entre essas duas sommas, se a primeira fôr maior ou menor que a segunda; se esta differença fôr divisivel por 7, o numero será divisivel por 7.

Appliquemos o que acabámos de dizer ao numero proposto :

Somma dos productos provindo das classes de ordem impar :

$$5.1 + 3.3 + 4.2 + 3.1 + 6.3 + 4.2 = 51.$$

Somma dos productos provindo das classes de ordem par :

$$5.1 + 3.3 + 2.2 + 2.1 + 7.3 = 51.$$

Assim o numero proposto é igual a um multiplo de 7, augmentado com 51 unidades, e diminuido de 59 unidades; isto é, diminuido de 8 unidades, e temos :

$$\begin{aligned} 72463295435 &= m.7 - 8 \\ &= m.7 + 14 - 8 \\ &= m.7 + 6 \end{aligned}$$

6 é por conseguinte o resto da divisão do numero proposto por 7.

Provas das quatro operações.

112. A verificação do resultado de uma opéração qualquer fundamental da Arithmetica por um numero qualquer exigindo os mesmos raciocinios, empregaremos o factor 9, e tudo quanto tivermos dito sobre este, applicar-se-ha immediatamente ao factor 11, e a qualquer outro. É preciso notar-se que os factores 9 e 11 são os numeros mais empregados; por que os restos das divisões por esses numeros se obtem mui facilmente.

PROVA DA ADDIÇÃO.

113. Theorema. *O resto da divisão de uma somma por um numero é o mesmo que aquelle que obteriamos substituindo a cada parte da somma o resto de sua divisão por esse numero.*

Seja uma somma :

$$S = A + B + C + D,$$

A, B, C, D sendo numeros quaesquer compostos de muitos algarismos, e seja p o factor escolhido e r, r', r'', r''', os restos das divisões respectivas de A, B, C, D por p, de sorte que :

$$\begin{aligned} A &= m\ .p + r \\ B &= m'.p + r' \\ C &= m''.p + r'' \\ D &= m'''.p + r''', \end{aligned}$$

Fazendo a somma d'essas igualdades membro a membro, temos :

$$A + B + C + D = M.p + (r + r' + r'' + r''') ;$$

por isso que a somma de muitos multiplos de p é um numero multiplo de p (nº 98).

Pela ultima igualdade vêmos que o resto da divisão da somma por p é o mesmo que o resto da divisaõ de $(r + r' + r'' + r''')$ por p. *o. q. e. n. d.*

Appliquemos este theorema ao seguinte exemplo, o factor escolhido sendo 9.

24632	$r = 8$	
3264	$r' = 6$	R = 8
526	$r'' = 4$	
4769	$r''' = 8$	
33191		R = 8

Vêmos com effeito que o resto 8 da divisão da somma 33191 por 9 é o mesmo que o da divisão por 9 da somma (8 + 6 + 4 + + 8) ; os numeros 8, 6, 4, 8 sendo tambem os restos das divisões das differentes parcellas por 9.

PROVA DA SUBTRACÇÃO.

114. Chamemos D o minuendo, d o subtrahendo e r o resto de uma subtracção ; é claro que temos

$$D = d + r,$$

logo, empregando o theorema precedente, podemos obter a verificação do resultado de uma subtracção.

Tomemos o seguinte exemplo :

43602		R = 6
2679	$r = 6$	. . R = 6
40923	$r' = 0$	

Com effeito vêmos que o resto 6 da divisão do minuendo 43602 é o mesmo que o resto 6 da divisão da somma 6 + 0 ou 6.

PROVA DA MULTIPLICAÇÃO.

115. Theorema. *O resto da divisão de um producto de dous factores por um numero é o mesmo que aquelle que obteriamos se substituissemos a esses dous factores os restos de suas divisões por esses numeros.*

Seja $a \times b$ um producto de dous factores, p o divisor escolhido, e r, r' os restos das divisões respectivas de a e b por p.

Queremos demonstrar que o resto da divisão de $a \times b$ por p é o mesmo que o resto da divisão de $r \times r'$ por p.

Com effeito é facil ver-se que :

$$a = m.p + r$$
$$b = m'.p + r';$$

multiplicando membro a membro essas igualdades, teremos :

$$a \times b = m.p \times m'.p + r \times m'.p + r' \times m.p + r \times r' \text{ (n° 79)};$$

e notando que a somma de muitos multiplos de p é um numero multiplo de p, que pode ser representado por $M.p$, tem-se emfim :

$$a \times b = M.p + r \times r'.$$

Esta ultima igualdade mostra que o resto da divisão de $a \times b$ por p é o mesmo que o resto da divisão de $r \times r'$ por p.

o. q. e. n. d.

Appliquemos este theorema ao seguinte exemplo :

```
 46749 . . . . . . r = 3 }
   325 . . . . . r' = 1 } r × r' = 3 . . . . R = 3
──────
 233745
  93498
140247
────────
15193425. . . . . . . . . . . . . . . . . . . R = 3
```

Podemos concluir que a operação é exacta, por isso que o resto 3 da divisão por 9 do producto 15193425 é o mesmo que o resto 3 da divisão por 9 do producto de 3×1, os numeros 3 e 1 sendo por seo turno os restos das divisões dos factores por 9.

PROVA DA DIVISÃO.

116. Seja D o dividendo, d o divisor, e q o quociente de uma divisão, é claro que :

$$D = d \times q;$$

por conseguinte, empregando o theorema precedente, poderemos verificar o resultado de uma divisão.

Na seguinte divisão :

$R=4$	19366492	257 . . . . $r=5$	$R=4$
	1376	75356 . . . $r'=8$	
	914		
	1439		
	1541		

Vemos que o resto 4 do dividendo é o mesmo que o resto 4 do producto de 5×8; 5 e 8 sendo os restos respectivos do divisor e quociente.

Se a divisão não se faz exactamente :

$$D = d.q + r;$$

então empregão-se os dous theoremas (nº 113) e (nº 115); procura-se o resto de $d.q$; ajunta-se este resto a r; o resto d'esta somma deve ser o mesmo que o resto de D.

Dividindo 5603407 por 826, acha-se por quociente 6662 e o resto 595.

O resto de 826 . . . é . . . 7 ⎫ $r=5$ ⎫
. . . . de 6662 . . . é . . . 2 ⎭ ⎬ R = 6
. . . . de 595 . . . é . . . . . $r'=1$ ⎭

Com effeito no dividendo acha-se. . . . . . . R = 6

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *O resto da divisão por* 9 *ou por* 11 *de um producto qualquer de muitos factores é o mesmo que o resto da divisão por* 9 *ou* 11 *do producto dos restos correspondentes aos differentes factores.*

Sejão N, N', N'', N''' os numeros dados, r, r', r'', r''' os restos de suas divisões por 9, de maneira que

$$\begin{aligned} N &= m\,.9+r \\ N' &= m'.9+r' \\ N'' &= m''.9+r'' \\ N''' &= m'''.9+r'''\,; \end{aligned}$$

multiplicando essas igualdades membro a membro, temos:

$$N\times N'\times N''\times N'''=M.9+r\times r'\times r''\times r''',$$

$M.9$ representando um multiplo de 9; logo o resto da divisão do producto dos numeros dados por 9 é o mesmo que o resto da divisão por 9 do producto dos restos, $r\times r'\times r''\times r'''$.

II. *Todo numero impar é igual a um multiplo de* 4 *mais ou menos uma unidade.*

Dividindo um numero inteiro por 4, os restos que se obtem são 0, 1, 2, 3, logo $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ representão numeros inteiros; ora $4n$, e $4n+2$ são numeros pares, e $4n+1$ e $4n+3=4n-4+3=4n-1$ são numeros impares.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

III. *O producto de dous numeros inteiros consecutivos é divisivel por 2.*

IV. *O producto de tres numeros inteiros consecutivos é divisivel por 6.*

V. *O producto de quatro numeros inteiros consecutivos é divisivel por 24.*

VI. *Demonstrar que um numero é divisivel por 6, se o algarismo das unidades junto a quatro vezes a somma de todos os outros dá uma somma divisivel por 6.*

VII. *Demonstrar que um numero é divisivel por 4, se o algarismo das unidades junto a duas vezes o algarismo das dezenas dá uma somma divisivel por 4.*

VIII. *Demonstrar que um numero é divisivel por 8, se o algarismo das unidades mais o dobro do algarismo das dezenas, mais o quadruplo do algarismo das centenas fórmão uma somma divisivel por 8.*

IX. *Demonstrar que, logo que se dividem dous numeros pela sua differença, os restos são iguaes.*

X. *Demonstrar que um numero é divisivel por 12, se o numero formado pelos seos dous ultimos algarismos á direita, mais quatro vezes a somma dos outros, é um numero divisivel por 12.*

CAPITULO III.

THEORIA DO MAIOR DIVISOR COMMUM. — THEORIA DO MENOR MULTIPLO COMMUM.

Theoria do maior divisor commum.

117. Já definimos o que se chama *divisor*. Um numero pode ter muitos divisores; mais tarde veremos a maneira pela qual se determina todos os divisores de um numero: o menor divisor de um numero é a unidade, e o maior é o proprio numero. Um numero, que não tem outros divisores senão a si proprio ou a unidade, chama-se numero *primo*.

Quando um numero divide muitos outros ao mesmo tempo, é dito seo *commum divisor*. Entre todos os divisores communs de muitos numeros ha um que é o maior de todos, e que se chama *maior divisor commum*, cuja theoria é de muita importancia na Arithmetica. A busca do maior divisor commum é fundada sobre alguns theoremas, que vamos demonstrar.

118. Theorema I. *Quando um numero é divisivel por outro, este é o maior divisor commum dos dous numeros.*

Seja a um numero que é divisivel por b, e que é maior que b. O maior divisor commum dos dous numeros deve dividir b, e não pode ser maior que b, por isso que b é o menor d'elles; porém b divide a, e é divisor de si proprio, logo b é o maior divisor commum dos dous numeros.

119. Theorema II. *Dous numeros, que não são divisiveis um pelo outro, teem o mesmo maior divisor commum que o menor d'elles e o resto da divisaõ do primeiro pelo segundo, quer se tome o quociente por defeito ou por excesso.*

Sejão 53437, e 432 dous numeros, que não são divisiveis um

pelo outro ; o quociente da divisão por defeito é 123, e o resto é 301, de sorte que :

$$53437 = 432 \times 123 + 301.$$

Queremos demonstrar que o maior divisor commum de 53437 e 432 é igual ao maior divisor commum de 342 e 301.

I. Com effeito, todo divisor commum de 53437 e 432, divide 432, e por conseguinte 432 × 123 (nº 97) e por isso que divide 53437, dividirá necessariamente 301, que é a differença (nº 99).

II. Reciprocamente todo divisor commum de 432 e de 301, divide 432, e por conseguinte 432 × 123; e por isso que divide 301, dividirá a somma d'esses dous numeros ; isto é 53437.

D'estas duas partes da demonstração conclue-se que, os divisores communs de 53437 e 432 sendo os mesmos que os de 436 e 301, o maior divisor commum dos primeiros é igual ao dos ultimos. *o, q. e. n. d*

Tomando o quociente por excesso, temos a relação seguinte :

$$53437 = 432 \times 124 - (432 - 301).$$

Demonstrariamos da mesma maneira que o maior divisor commum de 53437 e 432 é o mesmo que o maior divisor commum de 432 e (432 — 301) ou de 432 e 131.

BUSCA DO MAIOR DIVISOR COMMUM DE DOUS NUMEROS INTEIROS.

120. Sejão 924 e 156 os numeros de que buscamos o maior divisor commum: pelos theoremas precedentes somos levados a dividir 924 por 156; effectuando esta divisão, achamos o quociente 5 e o resto 144 ; porém, como o maior divisor commum de 924 e 156 é o mesmo que o de 156 e 144, dividamos 156 por 144, o quociente é 1 e o resto 12; pela mesma razão dividindo 144 por 12, achamos um quociente exacto 12; logo 12 é o maior divisor commum dos numeros propostos.

121. Regra. *Para achar o maior divisor commum de dous numeros, divide-se o maior pelo menor, este pelo resto da divisão, o primeiro resto pelo segundo e assim por diante, até chegar-se a um resto nullo: o ultimo divisor empregado é o maior divisor commum,*

Eis o typo da operação:

	5	1	12
924	156	144	12
780	144	144	
144	12	0	

122. *Observação* I. Dous restos consecutivos quaesquer têm o mesmo maior divisor commum que os numeros dados; por conseguinte se no curso da operação se conhece o maior divisor commum de dous restos, inutil será continuar a operação.

123. *Observoção* II. Na busca do maior divisor commum os restos vão sempre diminuindo, e não se pode deixar de chegar a um resto nullo, por isso que seo numero é necessariamente limitado.

124. *Numeros primos entre si.* Se procurando o maior divisor commum de dous numeros se obtem por ultimo divisor a unidade, esta é seo maior divisor commum: taes numeros são ditos primos entre-si.

125. *Observação* III. Se na busca do maior divisor commum de dous numeros um dos restos é primo, e se este não divide o precedente, inutil será continuar a operação, pois é seguro que os numeros propostos são primos entre-si.

126. Theorema III. *Se um numero divide dous outros, divide seo maior divisor commum, e reciprocamente, se um numero divide o maior divisor commum de dous outros, divide estes ultimos.*

Seja 6 um numero que divide 546 e 462; 6 dividirá o maior divisor commum d'esses numeros. Com effeito, 6 dividindo 546 e 462, divide 84, resto da divisão d'esses numeros; dividindo 462 e 84 divide o resto 42 d'esta divisão; porém 42, é o maior divisor commum dos numeros propostos, logo o theorema se acha demonstrado.

A demonstração da proposição inversa é clara; pois quando um numero divide outro, divide os seos multiplos.

SIMPLIFICAÇÃO NA BUSCA DO MAIOR DIVISOR COMMUM DE DOUS NUMEROS INTEIROS.

127. A determinação do maior divisor commum de dous numeros será tanto mais rapida quanto mais depressa se diminuirem os restos. Por conseguinte, se, buscando o maior divisor commum de dous numeros, um resto qualquer fôr maior que a metade do divisor correspondente, forçaremos o algarismo do quociente, e obteremos assim um resto menor que o precedente e tal, que o maior divisor commum d'esse resto e do dividendo empregado é o mesmo que o maior divisor commum d'esse dividendo e do divisor correspondente (nº 119).

Appliquemos o que acabámos de dizer ao seguinte exemplo:

	5	13	
1551	195	15	
180	0		
15			

Dividindo 1155 por 195, o quociento é 5 e o resto 180; porém 180 sendo maior que $\frac{195}{2}$, podemos forçar o algarismo 5 do quociente; isto é, augmental-o com uma unidade; procurando a differenca entre $195 \times 6 - 1155$, que é 15, somos levados (nº 127) a buscar o maior divisor commum de 195 e 15; como

15 divide 195 exactamente, 15 é o maior divisor commum dos numeros propostos.

É claro que, para achar-se a dita differença 195 + 6 — 1155, basta diminuir do divisor 195 o resto 180, o que dá justamente 15.

Introduzindo esta simplificação que não é nada difficil na busca do maior divisor commum, diminue-se consideravelmente o numero de divisões a effectuar-se; assim no exemplo precedente, seguindo o proceder ordinario, teriamos que fazer tres divisões, ao passo que só fizemos duas.

BUSCA DO MAIOR DIVISOR COMMUM DE MUITOS NUMEROS INTEIROS.

128. THEOREMA. *O maior divisor commum de muitos numeros é igual ao maior divisor commum do menor d'elles, e dos restos das divisões dos outros pelo menor.*

Sejão a, b, c, d muitos numeros, dos quaes supponhamos a o menor, e sejão r, r', r'' os restos das divisões respectivas de b, c, d por a, de sorte que :

$$b = n \,.\, a + r$$
$$c = n' \,.\, a + r'$$
$$d = n'' \,.\, a + r'';$$

queremos demonstrar que o maior divisor commum de a, b, c, d é o mesmo que o de a, r, r', r''.

Com effeito, todo divisor commum de a, b, c, d dividindo a e b, divide r; dividindo a e c, divide r'; dividindo a e d, divide r''; por conseguinte todo divisor commum de a, b, c, d é divisor commum de a, r, r', r''.

Reciprocamente, todo divisor commum de a, r, r', r'', dividindo a e r, divide b; dividindo a e r', divide c; dividindo a e r'', divide d; logo todo divisor commum de a, r, r', r'', é divisor commum de a, b, c, d.

D'estas duas partes da demonstração conclue-se que os divi-

sores communs de a, b, c, d são iguaes aos divisores communs de a, r, r', r'', e por conseguinte o maior divisor commum dos primeiros numeros é o mesmo que o dos segundos.

Supponhamos que sejão :

$$420, \ 264, \ 468, \ 360 \qquad (1)$$

numeros de que buscamos o maior divisor commum.

Dividindo esses numeros pelo menor 264, o maior divisor commum dos numeros dados é igual ao maior divisor commum dos seguintes

$$156, \ 264, \ 208, \ 96 \qquad (2)$$

que são os restos das divisões dos primeiros (1) por 264; o maior divisor commum dos numeros (2) é igual ao dos numeros seguintes

$$60, \ 72, \ 12, \ 96 \qquad (3)$$

que são os restos das divisões dos numeros (2) pelo menor d'elles 96.

Dividindo os numeros (3) pelo menor d'elles 12, e as differentes divisões fazendo-se exactamente, 12 é o maior divisor commum dos numeros dados.

129. Regra. *Para achar-se o maior divisor commum de muitos numeros, dividem-se todos elles, excepto o menor, por este menor, e substituem-se a estes numeros os restos de suas divisões pelo menor ; obtem-se uma nova serie d'outros numeros, menores que os numeros dados, e sobre os quaes opera-se da mesma maneira, e assim successivamente até chegar-se a dous numeros, cujo maior divisor commum será o dos numeros propostos.*

É facil ver-se que este methodo é uma generalisação do methodo empregado na busca do maior divisor commum de dous numeros.

OUTRO METHODO.

130. THEOREMA. *O maior divisor commum de muitos numeros é igual ao maior divisor commum d'esses numeros menos dous d'elles, que são substituidos pelo seo maior divisor commum.*

Sejão a, b, c, d os numeros dados; e δ o maior divisor commum de a e b, o maior divisor commum de

$$a,\ b,\ c,\ d$$

será o mesmo que o de :

$$\delta,\ c,\ d.$$

Com effeito, um commum divisor de a, b, c, d, dividindo em particular a e b, divide δ (nº 126); por conseguinte um commum divisor de a, b, c, d é commum divisor de δ, c, d; reciprocamente, um commum divisor de δ, c, d, divide a, b, c, d, por isso que a, b são multiplos de δ.

Segue-se d'ahi que os divisores commums de a, b, c, d são iguaes aos divisores communs de δ, c, d, e por conseguinte o maior divisor commum dos primeiros é igual ao dos segundos.

Determinemos o maior divisor commum dos seguintos numeros :

$$9702,\ 4400,\ 2002,\ 594,\ 66. \qquad (1)$$

O maior divisor commum d'estes é o mesmo que o dos seguintes :

$$4400,\ 2002,\ 594,\ 66 \qquad (2)$$

sendo 66 o maior divisor commum de 9702 e 66. Estes (2) podem ser substituidos pelos seguintes:

$$4400,\ 2002,\ 66 \qquad (3)$$

66 sendo o maior divisor commum de 594 e 66.

Procurando o maior divisor commum de 4000, e 2002 achamos ser 22; por conseguinte os numeros (3) podem ser substituidos pelos seguintes:

22, 66

cujo maior divisor commum é 22; logo o maior divisor commum dos numeros dados (1) é 22.

131. REGRA. *Para determinar o maior divisor commum de muitos numeros procura-se o maior divisor commum de dous d'entre elles, depois o maior divisor commum do numero assim obtido e d'outro d'entre elles, e assim por diante, até que todos os numeros dados tenhão sido empregados.*

Limite do numero de divisões a que pode dar lugar a busca do maior divisor commum.

132. Vamos determinar um limite superior do numero de divisões que se tem de fazer para determinar o maior divisor commum.

LEMMA. *Um resto qualquer é menor que ametade d'aquelle que o precede de duas ordens;*

Sejão $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, \ldots\ldots R_m$ os differentes restos achados na busca do maior divisor commun entre A e B; queremos demonstrar que um resto qualquer $R_4 < \frac{R_2}{2}$.

Com effeito se $R_3 < \frac{R_2}{2}$, *á fortiori* R_4 será menor que $\frac{R_2}{2}$, por isso que os restos vão sempre diminuindo; porém se $R_3 > \frac{R_2}{2}$, então R_3 não é contido em R_2 senão uma vez, e o resto da divisão de R_2 por R_3 é igual a $R_2 - R_3$, e como R_3 é maior que $\frac{R_2}{2}$, por conseguinte $R_2 - R_3 < \frac{R_2}{2}$, ou $R_4 < \frac{R_2}{2}$.

o. q. e. n. d.

Segue-se d'esta proposição que $R_2 < \frac{B}{2}$, B é o menor dos dous numeros.

133. THEOREMA. *Escrevendo em uma linha horizontal as differentes potencias de 2 :*

$$2, 4, 8, 16, 32. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2^{2n},$$

o dobro da ordem que occupar a potencia de 2, que fôr immediatamente superior ao menor dos dous numeros A, e B, de que se busca o maior divisor commum, será o limite do numero de divisões a effectuar-se.

Supponhamos $A > B$; em virtude do lemna $R_2 < \frac{B}{2}$, $R_4 < \frac{R_2}{2}$, logo $R_4 < \frac{B}{4}$; $R_6 < \frac{R_4}{2}$, logo $R_6 < \frac{B}{8}$; $R_8 < R_6$, e com mais razão $R_8 < \frac{B}{16}$; e assim successivamente; em geral $R_{2.n} < \frac{B}{2^n}$; se $2^n > B$ então $\frac{B}{2_n} < 1$, e $R_{2.n} < 1$, e como na busca do maior divisor commum um resto não pode ser menor que a unidade, logo não poderá haver $2n$ divisoẽs; $2n$ é pois o limite superior.

Theoremas relativos ao maior divisor commum.

134. THEOREMA I. *Todo numero que divide muitos outros, divide seo maior divisor commum ; e reciprocamente todo divisor do maior divisor commum de muitos numeros é tambem divisor d'esses numeros.*

Sejão a, b, c, d os numeros dados, dos quaes δ é um divisor commum ; queremos demonstrar que δ divide D, representando D o maior divisor commum de a, b, c, d.

O numero δ dividindo a e b, divide o maior divisor commum d'esses dous numeros (nº 126), que representamos por D_1; δ dividindo D_1 e c, divide o maior divisor commum d'esses

dous numeros que chamamos D_2; δ dividindo D_2 e d, divide o maior divisor commum d'esses dous numeros, que é D.

o. q. e. n. d.

A proposição inversa é evidente; porque a, b, c, d sendo numeros multiplos de D, são multiplos de um dos factores de D, tal que δ.

135. Theorema II. *Logo que se multiplica ou divide muitos numeros por outro, o maior divisor commum d'aquelles é multiplicado ou dividido por este.*

Supponhamos primeiramente dous numeros; sejão a, b esses numeros, D seo maior divisor commum e δ o numero escolhido; queremos demonstrar que logo que se multiplica ou divide a e b por δ, o maior divisor commum D é tambem multiplicado ou dividido por δ.

Procuramos o maior divisor commum de a e b dividindo a por b; se r representa o resto d'esta divisão, dividimos ainda b por r; se esta divisão não se faz exactamente, e se r' representa o resto, dividimos r por r', e assim successivamente até chegarmos a um resto nullo; d'outro lado sabemos que, logo que se multiplica ou divide o dividendo e o divisor por um mesmo numero, o resto é tambem multiplicado ou dividido por esse numero (nº 85); isto é, se multiplicarmos ou dividirmos a e b por δ, r torna-se $r \times \delta$ ou $\frac{r}{\delta}$; e como este resto vem a ser divisor na seguinte divisão, o resto d'esta segunda divisão r' torna-se $r' \times \delta$ ou $\frac{r'}{\delta}$; todos os restos se achão pois multiplicados por δ, e como o penultimo não é mais do que o maior divisor commum, logo, etc.

Consideremos muitos numeros a, b, c, d, seja D o maior divisor commum, e δ o divisor escolhido.

Procuramos o maior divisor commum de muitos numeros a, b, c, d, procurando o maior divisor commum de a e b, que designamos por D_1; depois o maior divisor commum de D_1 e c, que representamos por D_2, depois o maior divisor commum de D_2 e d, que é D; porém a e b, sendo multiplicados ou divi-

didos por δ, D, é tambem multiplicado ou dividido por δ (1ª parte do th.); D_1 e c sendo multiplicados ou divididos por δ, D_2, é tambem multiplicado ou dividido por δ; e, emfim, pela mesma razão, D será tambem multiplicado ou dividido por δ. *o. q. e. n. d.*

Se nos pedissem de determinar o maior divisor commum dos seguintes numeros:

$$36300,\ 594000,\ 643500\ ;$$

dividiriamos esses numeros por 100, e procurariamos o maior divisor commum dos numeros

$$363,\ 594,\ 6435\ ;$$

porém como pelo theorema acima, o maior divisor commum d'estes ultimos é 100 vezes menor que o maior divisor commum dos numeros propostos, logo, para termos este, determinariamos aquelle que multiplicariamos depois por 100.

136. Theorema III. *Logo que se divide dous ou mais numeros pelo seo maior divisor commum, os quocientes são numeros primos entre si.*

Com effeito, dividindo os numeros dados pelo seo maior divisor commum, dividimos este maior divisor commum por si mesmo (nº 135), e o quociente é a unidade; porém dous numeros, que teem por maior divisor commum a unidade, são primos entre si; logo o theorema se acha demonstrado.

137. Theorema IV. *Logo que um numero divide um producto de dous factores e é primo com um d'elles, divide tambem o outro.*

Seja n um numero que divide o producto $a \times b$, n sendo primo com a, digo que n divide b. Com effeito, n sendo primo com a, o maior divisor commum é a unidade; multipliquemos estes dous numeros por b, o maior divisor commum dos dous productos

$$n \times b, \text{ e } a \times b$$

será b (nº 135); n divide $a \times b$ por hypothese, tambem divide $n \times b$, porque entra como factor, logo divide o maior divisor commum d'esses dous numeros; isto é b. *o. q. e. n. d.*

Theoria do menor multiplo commum.

BUSCA DO MENOR MULTIPLO COMMUM DE DOUS NUMEROS INTEIROS.

138. Já definimos o que se chama multiplos de muitos numeros: entre todos os multiplos de muitos numeros ha um que é o menor de todos, e que se chama *menor multiplo*, de muita importancia na Arithmetica, onde seo uso e applicação são continuos.

THEOREMA I. *O menor multiplo de dous numeros é igual ao quociente da divisão do producto d'esses numeros pelo seo maior divisor commum.*

Sejão a e b os numeros dados, d o maior divisor commum, de sorte que:

$$a = d.\,a' \qquad (1)$$
$$b = d.\,b' \qquad (2)$$

m sendo um multiplo de a, temos:

$$m = a \times q; \qquad (3)$$

m sendo tambem um multiplo de b, b divide m, e por conseguinte $a \times q$, ou $d \times a' \times q$, por isso que $a = d \times a'$; assim $\frac{d \times a' \times q}{b}$ ou $\frac{d \times a' \times q}{d \times b'}$ ou $\frac{a' \times q}{b'}$ é um numero inteiro; logo é necessario que $a' \times q$ seja divisivel por b'; e por isso que a' é primo com b', é necessario que b' divida q (nº 137), e temos:

$$q = b' \times q';$$

o valor de m (3) torna-se:

$$m = a \times b' \times q'$$

ou

$$m = a \times \frac{b}{d} \times q' = \frac{a \times b}{d} \times q' \qquad (4)$$

escrevendo em lugar de b' seo valor $\frac{b}{d}$ (2). A expressão (4) é uma formula geral dos multiplos de dous numeros; $\frac{a \times b}{d}$ é uma quantidade constante, q' é uma quantidade variavel que pode receber toda sorte de valores, que multiplicados pela quantidade constante $\frac{a \times b}{d}$, darão os differentes multiplos de a e b.

Se $q' = 1$, então :

$$m = \frac{a \times b}{d} \qquad (5)$$

representa o menor multiplo possivel de a e b. *o q. e. n. d.*

Observação I. A igualdade $m = \frac{a \times b}{d} \times q'$ mostra que os multiplos de a e b são multiplos do menor multiplo d'esses dous numeros e reciprocamente.

Observação II. A igualdade (5), dá :

$$m.\ d. = a.\ b$$

o que significa que : *o producto de dous numeros é igual ao producto do maior divisor commum pelo menor multiplo commum d'esses dous numeros.*

Observação III. Se os dous numeros a e b são primos entre si, então $d = 1$, e a formula (5) torna-se :

$$m = a \times b \ ;$$

isto é que : *o menor multiplo de dous numeros primos entre si, é igual ao producto d'esses dous numeros.*

Regra. *Para achar o menor multiplo de dous numeros, divide-se um d'elles pelo maior divisor commum, e multiplica-se o quociente pelo o outro numero.*

O menor multiplo de 123 e 36, cujo maior divisor commum é 3, é :

$$\frac{36}{3} \times 123 = 12 \times 123 = 1476$$

BUSCA DO MENOR MULTIPLO COMMUM DE MUITOS NUMEROS INTEIROS.

144. Theorema. *Muitos numeros sendo dados, procurando o menor multiplo de dous d'entre elles, depois o menor multiplo do numero assim obtido e de outro dos numeros dados, e assim por diante, até que todos os numeros dados tenhão sido empregados, o ultimo menor multiplo determinado será o menor multiplo commum de todos os numeros dados.*

Sejão a, b, c, d os numeros dados.

Procuremos o menor multiplo de a e b, seja m esse menor multiplo; os multiplos de m sendo multiplos de a e b (nº 129), para termos os multiplos de a, b, c, bastará procurar os multiplos de m e c; e por conseguinte teremos o menor multiplo de a, b, c, procurando o menor multiplo de m e c, que designamos por m': os multiplos de m' são multiplos de a, b, c, logo, para termos os multiplos de a, b, c, d, bastará determinar os multiplos commums de m' e d; e por conseguinte o menor multiplo de a, b, c, d será obtido procurando-se o menor multiplo de m' e d, o que demonstra o theorema proposto.

145. *Observação.* A demonstração d'este theorema faz ver que os differentes multiplos commums de muitos numeros são multiplos do menor multiplo d'esses numeros.

146. Regra. *Para obter-se o menor multiplo commum de muitos numeros, determina-se o menor multiplo commum de dous d'entre elles, depois o menor multiplo commum do numero assim obtido e de outro dos numeros dados, e assim successivamente, até que todos os numeros tenhão sido empregados; o ultimo menor multiplo determinado é o menor multiplo commum de todos os numeros dados.*

Determinemos o menor multiplo dos numeros 4, 6, 24, 9.

O menor multiplo commum de 4 e 6, de que 2 é o maior divisor commum, é :

$$\frac{4}{2} \times 6 = 2 \times 6 = 12;$$

o menor multiplo de 12 e 24, de que 12 é o maior divisor commum, é:

$$\frac{12}{12} \times 24 = 1 \times 24 = 24;$$

o menor multiplo de 24 e 9, cujo maior divisor commum é 3, é:

$$\frac{24}{3} \times 9 = 8 \times 9 = 72;$$

assim 72 é o menor multiplo commum dos numeros dados.

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS

I. *O producto de dous numeros é 864, e o menor multiplo 144. Determinar esses numeros.*

Sejão N e N' os numeros buscados, D o maior divisor commum d'esses numeros, m o menor multiplo dado, n e n' os quocientes das divisões de N, N' por D; sabemos que:

$$m = \frac{N.N'}{D}, \text{ e em seguida } D = \frac{N.N'}{m} = \frac{864}{144} = 6;$$

porém

$$N = n \times D \quad \text{e} \quad N' = n' \times D,$$

n, n' sendo dous numeros primos entre si; multiplicando as duas ultimas igualdades membro a membro, temos:

$$N.N' = n.n'.D^2,$$

d'onde se deduz

$$n.n' = \frac{N.N'}{D^2} = \frac{864}{36} = 24;$$

logo :

$$n=3 \text{ e } n'=8,$$

e em seguida :

$$N=3\times 6=18 \text{ e } N'=8\times 6=48.$$

II. *Tres moveis percorrem uma circumferençia ; o primeiro encontra o segundo todas as* 6^h, *e o segundo encontra o terceiro todas as* 8^h; *determinar o tempo que se passa entre dous encontros simultaneos e successivos dos tres moveis.*

É facil ver-se que o numero pedido é 24, menor multiplo dos numeros dados 6 e 8.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

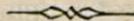
III. *O producto de dous numeros é* 336, *e o maior divisor commum* 4. — *Quaes são esses numeros ?*

IV. *A somma de dous numeros é igual a* 240, *o menor multiplo* 1728. — *Determinar esses numeros.*

V. *Achar o menor numero possivel que, dividido por* 6, 8 *e* 9, *dê o mesmo resto* 4.

VI. *Tres moveis percorrem no mesmo sentido uma circumferençia de* 360 *metros de comprimento ; o primeiro percorre* 34^m *em uma hora, o segundo* 12^m, *e o terceiro* 4. *Determinar o tempo que se passa entre dous encontros simultaneos e successivos dos tres moveis.*

VII. *Achar um numero de dous algarismos, que dividido por* 8 *e* 9 *dê o mesmo resto* 3.

VIII. *Demonstrar que, logo que se divide o menor multiplo de muitos numeros por cada um d'elles, os quocientes são primos entre si.*

CAPITULO IV.

THEORIA DOS NUMEROS PRIMOS. COMPOSIÇÃO DO MAIOR DIVISOR COMMUM. COMPOSIÇÃO DO MENOR MULTIPLO.

Definições.

147. Sabemos o que é numero *primo*, e o que se chama *numeros primos entre si* (n[es] 117, 124).

É preciso notar-se que *todo numero primo é primo com todos os outros numeros inteiros, que não fôrem seos multiplos*; por que não tendo por divisor senão a si proprio, ou a unidade, e não dividindo os numeros em questão, o unico divisor commum que pode haver, é a unidade, logo etc.

Theoremas fundamentaes.

168. THEOREMA I. *Todo o numero inteiro que não é primo, admitte ao menos um divisor primo.*

Seja n um numero que não é primo; n não sendo primo, admitte dous ou mais divisores; supponhamos que n' seja um d'elles, n' sendo um numero maior que 1 e menor que n; se n' é primo, o theorema está demonstrado; senão, admitte um divisor n'', que é maior que 1 e menor que n'; é claro que n'' é divisor de n, por isso que n é multiplo de n'; se n'' é primo,

o theorema está demonstrado ; senão etc. ; continuando o mesmo raciocinio, não podemos deixar de chegar a um divisor primo, por isso que o numero d'esses divisores é limitado, e vão diminuindo successivamente.

149. THEOREMA II. *Dous numeros, que não são primos entre si, teem ao menos um divisor primo commum.*

Sejão a e b dous numeros que não são primos entre si, e seja d o maior divisor commum d'esses numeros ; se d é primo o theorema está demonstrado ; senão, d, admitte necessariamente um divisor primo (nº 147) que será divisor de a e b.

o. q. e. n. d.

150. THEOREMA III. *A serie dos numeros primos é illimitada.*

Supponhamos que n seja o maior de todos ; façamos o producto de todos os numeros primos desde 2 até n, ajuntemos 1 a esse producto ; chamando S o resultado, temos :

$$2.3.5.7. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n+1=S$$

S deve admittir ao menos um divisor primo (nº 247) ; porém este divisor não pode ser um dos factores do producto 2. 5. 5... n, por que este factor dividiria este producto, e por conseguinte dividindo S, e uma parte de S ; isto é 2. 3. 5... n, deveria dividir a outra parte que é 1, o que é absurdo; logo o numero S admitte um divisor maior que n, o que mostra que n não é o maior numero primo possivel, e por consequencia a serie dos numeros primos é illimitada.

Determinação dos numeros primos.

151. THEOREMA. *Todo numero inteiro que, não sendo quadrado de outro numero inteiro, não admitte divisor algum menor que sua raiz quadrada, não admitte outros e é primo.*

Seja n um numero, cuja raíz quadrada é $\sqrt{n}$.

É claro que

$$n = \sqrt{n} . \sqrt{n};$$

se d representa um divisor de n e q o quociente, tambem temos :

$$n = d \times q$$

e por conseguinte

$$\sqrt{n} . \sqrt{n} = d . q ;$$

esta igualdade mostra que, se d é menor que $\sqrt{n}$, q é maior que $\sqrt{n}$, e reciprocamente se d é maior que $\sqrt{n}$, q é menor que $\sqrt{n}$; isto quer dizer que, quando um numero tem um divisor menor que sua raiz quadrada, tem outro maior; e quando tem um divisor maior que sua raiz qudrada tem outro menor; por conseguinte, logo que não tem divisor algum menor que sua raiz, não admitte outro, e é primo; porque se tivesse um divisor maior que sua raiz, teria outro menor, o que é contrario á hypothese.

152. Corollario. Da demonstração do theorema precedente conclue-se que, quando se divide um numero por um divisor menor que sua raiz quadrada, obtem-se um quociente maior que esta raiz, e por conseguinte menor que o divisor empregado; e, quando se emprega um divisor maior que a raiz, obtem-se um quociente menor, e á *fortiori*, menor que o divisor; de maneira que em toda a divisão pode-se sempre conhecer se o divisor empregado é ou não menor que a raiz do dividendo, observando somente se o quociente é maior ou menor que o divisor.

151. A determinação dos numeros primos não é mais do que uma applicação do theorema e do corollario precedentes; com effeito, para reconhecermos se um numero é ou não primo

bastará dividil-o por 2, 3, 5, 7... successivamente até chegar-se a um quociente menor que o divisor empregado: se até ahi não se tiver encontrado divisor algum do numero dado, pelo theorema precedente, sabemos que inutil será ensaiar a divisão por outros factores; porque elle não terá outro, e será primo.

Vejamos se 127 é um numero primo;

127

Divisores.	*Quocientes.*
1	1 127
2	não é divisivel.
3	» »
5	» »
7	18 + resto
11	11 + resto
13	9 + resto

Empregámos os divisores 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13; dividindo 127 pelo ultimo; isto é, por 13, achamos por quociente 9 mais um resto; isto é, um quociente menor que o divisor empregado, logo o numero 127 é primo: é facil ver-se que a raiz quadrada de 127 é comprehendida entre 11 e 13.

Formação de uma taboa de numeros primos.

154, É a *Eratosthenes,* nascido em *Cyrene,* 276 annos antes de Jesus-Christo, que se deve a invenção de um dos methodos mais simples para descobrir-se todos os numeros primos na serie natural dos numeros até certo limite determinado; methodo conhecido sob o nome de *crible d'Erathosthenes,* que vamos expôr.

Os numeros pares não sendo primos á excepção de 2, inutil é procurar estes entre aquelles; podemos pois supprimir na serie natural dos numeros até o limite determinado todos os numeros pares, o que se faz apagando todos os numeros sobre os quaes se cahe, contando de dous em dous á partir de 2.

Como todo numero primo é impar, e que todo numero impar não é primo, os numeros primos se acharão na serie dos numeros impares, que escrevemos :

1 2 ~~3~~ 5 7 ~~9~~ 11 13 ~~15~~ 17 19 ~~21~~ 23
25 ~~27~~ 29 31 ~~33~~ 35 37 ~~39~~ 41 43 ~~45~~ 47
49 ~~51~~ 53 55 ~~57~~ 59 61 ~~63~~ 65 67 ~~69~~ 71
73 ~~75~~ 77 79 ~~81~~ 83 85 ~~87~~ 89 91 ~~93~~ 95
97 ~~99~~ 101 103 ~~105~~ 107 109 ~~111~~ 113
. . . .

Nésta serie de numeros, um numero qualquer differe do precedente de duas unidades, e do que o precede de 3 ordens de 6 unidades, logo um numero que vem tres ordens depois de um numero divisivel por 3 é divisivel por 3 (nº 98) ; o que vem tres ordens depois de um numero que não é divisivel por 3, não é divisivel por 3; porque compondo-se de duas partes, uma divisivel por 3 e a outra não, não pode ser divisivel por 3 ; logo, se a partir de 3 contarmos de tres em tres os numeros, sobre os quaes cahirmos, serão todos divisiveis por 3, e não sendo por conseguinte primos, devem ser riscados.

Fazendo o mesmo raciocinio veriamos que todos os numeros sobre os quaes se cahe contando de cinco em cinco a partir de 5, são todos divisiveis por 5, e devem ser riscados ; que todos os numeros sobre os quaes se cahe contando de sete em sete a partir de 7, de 11 em 11 a partir de 11, etc., são todos divisiveis por 7 e 11, etc., e devem ser riscados.

Tendo assim supprimido na serie dos numeros impares todos os numeros divisiveis por 3, 5, 11, etc., os numeros, que restão, são os numeros primos buscados.

É importante saber-se em que epocha da operação prece-

dente um numero não riscado é primo; digo que, depois que se tiverem apagado os multiplos de 3 e 5, os numeros que restarem desde 1 até 49 exclusivamente, quadrado do numero 7 immediatamente superior a 5, são todos primos; com effeito, a raiz quadrada d'esses numeros desde 1 até 49, é menor que 7, esses numeros não tendo divisor algum menor que 7, por isso que todos os multiplos de 3 e 5 forão supprimidos, não teem outros e são primos (nº 151).

Pela mesma razão, logo que se tiverem riscado os multiplos de 3, 5 e 7, pode-se affirmar que desde 1 até 121 exclusivamente, quadrado de 11, numero immediatamente superior a 7, todos os numeros restantes serão primos.

Em geral, logo que se tiverem riscado os multiplos de 3, 5, 7, 11... até n, m, sendo o numero immediatamente superior a n, pode-se affirmar que os numeros que restarem desde 1 até m^2 exclusivamente, são primos.

SIMPLIFICAÇÃO.

155. Esta idéa simplifica um pouco o methodo *do geometra grego* na descoberta dos numeros primos. Com effeito, logo que se tiverem supprimido os multiplos de 3, os numeros desde 1 até 25 exclusivamente são primos; por conseguinte, logo que passarmos a supprimir os multiplos de 5, inutil será começar pelo numero 5, será bastande fazel-o pelo numero 25; tendo supprimido os multiplos de 3 e 5, todos os numeros que restão desde 1 até 49 são primos; e quando passarmos ao numero 7, bastará começar pelo numero 49, e assim successivamente.

Em geral, logo que se tiverem supprimido os multiplos de 1, 2, 3... n para passar a supprimir os multiplos de m, numero que suppômos immediatamente superior a n, bastará começar pelo numero m^2.

TABOA DOS NUMEROS PRIMOS DESDE 1 ATÉ 1000.

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Theoremas relativos aos numeros primos.

156 THEOREMA I. *Todo numero primo, que divide um producto de muitos factores, divide necessariamente um d'elles.*

Seja n um numero que divide o producto $a \times b$, composto de dous factores; digo que se n divide $a \times b$, divide ou a ou b.

Com effeito, se n não divide a, é primo com a, e então deve dividir b (nº 137).

Sejão geralmente a, b, c, d muitos factores, cujo producto é divisivel por n, digo que n divide um dos factores ou a, ou b, ou c, ou d.

Com effeito podemos escrever :

$$a. b. c. d = a \times b. c. d.$$

considerando $a. b. c. d$ como um numero composto de dous factores a e $b. c. d$; ora em virtude da primeira parte da demonstração n deve dividir ou a ou $b. c. d$, se n divide a, o theorema está demonstrado, quando não, deve dividir $b. c. d$, que podemos pôr :

$$b. c. d = b \times c. d ;$$

n dividindo $b. c. d$ divide ou b ou $c. d$; se n divide b, o theorema está demonstrado, quando não deve dividir $c. d$; porém :

$$c. d = c \times d ;$$

logo n, dividindo $c. d$, divide ou c, ou d. o. q. e. n. d.

157. Corollario. *Logo que um numero primo divide uma potencia de outro qualquer, divide esse numero.*

Com effeito, uma potencia de um numero sendo um producto de muitos factores iguaes a esse numero, se o producto fôr divisivel, um dos factores tambem o será. (nº 157).

158. *Observação.* Um numero primo não pode dividir um producto de factores primos sem ser igual a um d'elles.

Porque dividindo o producto, deve dividir um dos factores, que sendo primo com o dito numero, não tem outro divisor commum senão a si proprio ou a unidade.

159. Theorema II. *As potencias quaesquer de dous numeros, primos entre si, são tambem dous numeros primos entre si.*

Sejão a e b dous numeros primos entre si, digo que a^n e b^n tambem o são ; se assim não fosse, a^n e b^n admittirião um divisor commum d; porém d dividindo a^n, dividiria a, dividindo b^n dividiria b (nº 157), logo d seria um divisor commum de a e b, o que é contrario á hypothese.

160. Theorema III. *Um numero, primo com todos os factores de um producto, é tambem primo com esse producto ; e reciprocamente.*

Seja n um numero que é primo com cada um dos factores a, b, c do producto $a.\ b.\ c$, n será tambem primo com $a.\ b.\ c$.

Com effeito, se n e $a.\ b.\ c$ não fossem primos entre si, admittirião ao menos um divisor primo commum (nº 149) ; seja d esse divisor ; porém d dividindo $a.\ b.\ c$, dividiria um dos factores a por exemplo, logo haveria entre n e a um divisor d, o que é contrario á hypothese.

Reciprocamente. *Um numero primo com um producto de muitos factores é tambem primo com cada um dos factores.*

Se n é primo com $a.\ b.\ c$, digo que tambem o será com cada um dos factores e reciprocamente.

Com effeito, se n não fosse primo com o factor a por exemplo, existiria entre elles um factor commum d; porém dividindo a, dividiria $a.\ b.\ c$, que é um multiplo de a, o que é contrario á hypothese.

161. Theorema IV. *Um numero divisivel por muitos outros, primos entre si dous a dous, é tambem divivsiel pelo producto.*

Se n é divisivel separadamente por a, b e c, n será divisivel por $a.\ b.\ c$.

Com effeito, n sendo divisivel por hypothese por a, temos :

$$n = a \times q \qquad (1)$$

q sendo um numero inteiro ; b dividindo n divide $a \times q$; porém sendo primo com a, divide q e assim temos :

$$q = b.\ q' \qquad (2)$$

q' sendo um numero inteiro; substituindo este valor de q na igualdade (1), temos :

$$n = a \times b \times q'; \qquad (3)$$

c dividindo n, divide $a \times b \times q'$; porém sendo primo com a e b, é primo com $a \times b$, logo deve dividir q' :

$$q' = c \times q'', \qquad (4)$$

q'' sendo um numero inteiro; substituindo o valor de q'' (4) na igualdade (3) temos:

$$n = a \times b \times c \times q''$$

ou

$$n = a.\ b.\ c \times q''$$

o que prova que $a.\ b.\ c$ divide n. *o. q. e. n. d.*

Observação. É preciso notar-se que este theorema não é verdadeiro senão no caso em que os numeros são primos dous á dous.

APPLICAÇÃO D'ESTE THEOREMA.

162. Um numero será divisivel por 6, logo que fôr divisivel por 2 e 3 : assim um numero será divisivel por 6, logo que seo ultimo algarismo á direita fôr um numero par, e a somma de seos algarismos tomados com seos valores absolutos fôr um mulltplo de 3.

Da mesma maneira um numero será divisivel por 12, logo que fôr divisivel por 4 e 3; assim um numero será divisivel por 12, logo que seos dous ultimos algarismos á direita formarem um numero divisivel por 4, e a somma de seos algarismos fôr um multiplo de 3.

Um numero será divisivel por 15, logo que fôr divisivel por 5 e 3; assim, etc.

Um numero será divisel por 18, logo que fôr divisivel por 2 e 9; assim, etc.

Mais tarde veremos de quanta utildade é a applicação do theorema precedente na simplificação dos calculos.

Decomposição de um numero em factores primos.

163. THEOREMA I. *Todo o numero, que não é primo, é igual a um producto de factores primos.*

Se n não é primo, admitte ao menos um divisor primo d (nº 148) :

$$n = d.q;$$

se q é primo, o theorema se acha demonstrado; se não o é, admitte ao menos um divisor primo d', e tem-se :

$$q = d'.q'$$

e em seguida,

$$n = d.d'.q':$$

se q' é primo, o theorema está demonstrado ; se não é, continuar-se-hia o mesmo raciocinio até que se chegasse a um quociente primo, o que não pode deixar de acontecer, pois os quocientes q, q' etc., em numero limitado, vão diminuindo successivamente.

164. *Observação.* Na demonstração do theorema precedente se não suppõe que os factores d, d', d''... tenhão differentes valores : um mesmo factor pode figurar muitas vezes no producto.

Seja proposto decompôr 360 em seos factores primos.

É claro que :

$$\begin{aligned} 360 &= 36 \times 10 = 6 \times 6 \times 2 \times 5 = \\ &= 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 = \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \\ &= 2^3.\ 3^2\ 5; \end{aligned}$$

achamos que 360 contem tres factores iguaes a 2, dous factores iguaes a 3 e um igual a 5.

165. Theorema II. *Um numero não pode ser decomposto em factores primos senão de uma maneira.*

O theorema precedente fez-nos ver que n, sendo um numero não primo :

$$n = a \times b \times c \times \ldots\ldots \times k$$

$a, b, c\ldots\ldots, k$ sendo os differentes factores primos do numero n, alguns d'esses factores podendo ser iguaes; queremos demonstrar que não ha outro modo de decomposição do numero a em factores primos; isto é, que n não pode ser igual a outro producto de factores primos.

Supponhamos o contrario, e ponhamos :

$$n = a' \times b' \times c' \times \ldots\ldots \times k' ;$$

como os dous productos são iguaes a n, temos :

$$a \times b \times c \times \ldots\ldots \times k = a' \times b' \times c' \times \ldots\ldots k' ;$$

a' dividindo o segundo membro d'esta igualdade, deve dividir o primeiro, porém a' sendo um numero primo, não pode dividir o primeiro producto sem dividir um dos factores, a por exemplo; mas a sendo tambem um numero primo é necessario que a seja igual a a' (nº 158), logo $a = a'$; dividindo o primeiro membro por a e o segundo por a' temos :

$$b \times c \times \ldots\ldots \times k = b' \times c' \times \ldots\ldots \times k' ;$$

fazendo o mesmo raciocinio, veriamos que $b = b'$; dividindo de um lado por b e do outro por b', temos :

$$c \times \ldots\ldots \times k = c' \times \ldots\ldots \times k',$$

e assim successivamente; de maneira que, um factor que se acha n' um membro, se acha tambem no outro; e se um dos factores entra certo numero de vezes em um dos productos, entra o mesmo numero de vezes no outro.

Methodo para decompôr um numero em factores primos.

166. Seja o numero 630, que queremos decompôr em factores primos; vemos pelos conhecimentos que temos sobre os

caractéres de divisibilidade, que 630 não é primo e é igual a um producto de factores primos, que se trata de determinar.

O numero 630 é divisivel por 2, e o quocienie sendo 315, temos:

$$630 = 2 \times 315;$$

315 não é mais divisivel por 2, porém o é por 3 e temos:

$$315 = 3 \times 105;$$

por conseguinte:

$$630 = 2 \times 3 \times 105;$$

105 é ainda divisivel por 3, e tem-se:

$$105 = 3 \times 35$$

e por consequencia

$$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 35;$$

emfim 35 sendo igual a 5×7, temos:

$$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

ou

$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

Typo da operação:

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7

167. Regra. *Um numero sendo dado, para decompol-o em seos factores primos, divide-se esse numero por 2, se é possivel; o quociente ainda por 2, o novo quociente por 2 e continua-se até que a divisão não seja mais possivel; passa-se depois ao factor 3, ope-*

ra-se da mesma maneira; quando o ultimo quociente não é mais divisivel por 3, *passa-se ao factor* 5, *e assim successivamente.*

N'esta decomposição em factores primos é preciso ter em vista o theorema (nº 151).

168, *Observação.* O theorema (nº 165) permitte simplificar a regra que acabámos de dar para a decomposição de um numero em seos factores primos. Com effeito, como não ha senão um modo de decomposição em factores primos, por conseguinte qualquer que seja o meio que empregarmos, o resultado será sempre o mesmo.

O habito do calculo facilita muito a decomposição de um numero em seos factores primos; com effeito, acontece muitas vezes conhecer-se immediatamente que o numero dado é um producto de dous factores, que são tambem productos conhecidos d'outros factores; fazendo-se o producto de todos esse factores simples, tem-se um numero que é igual ao numero dado.

Tomemos por exemplo o numero 630, de que já tratámos; é claro que:

$$\begin{aligned}630 &= 63 \times 10 = \\ &= \overline{9 \times 7} \times \overline{2 \times 5} = \\ &= \overline{3 \times 3} \times 7 \times 2 \times 5 = \\ &= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7.\end{aligned}$$

Seja ainda o numero 720.

$$\begin{aligned}720 &= 72 \times 10 = 8 \times 9 \times 2 \times 5 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5.\end{aligned}$$

Consequencias dos dous ultimos theoremas.
Condição para que dous numeros sejão divisiveis um pelo outro.

169. THEOREMA. *Para que um numero seja divisivel por outro é necessario e sufficiente que todos os factores primos do*

divisor se achem no dividendo, affectados com expoentes ao menos iguaes.

Esta condição é necessaria; porque o dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente contem os factores, que compoem o divisor, assim como os que compoem o quociente.

II. *Esta condição é sufficiente ;* por que se fôr preenchida, poder-se ha decompôr o dividendo em dous factores, um que conterá os factores que entrão no divisor, e o outro os factores que entrão no quociente.

Tomemos, por exemplo, o numero $n = 2^4 \times 3^3 \times 5^6 \times 7$, e outro $n' = 2^4 \times 3^3 \times 5^5$; pelo que dissemos, o numero n é divisivel pelo numero n' ; o quociente d'esta divisão

$$\frac{n}{n'} = \frac{2^4 \times 3^3 \times 5^6 \times 7}{2^3 \times 3^3 \times 5^5} = 2 \times 1 \times 5 \times 7 = 2 \times 5 \times 7$$

obtem-se, escrevendo no quociente os factores do dividendo que não se achão no divisor, e os outros com um expoente igual á differença entre o expoente do factor do dividendo e o expoente do factor correspondente no divisor.

Quando um factor affectado do mesmo expoente se acha no dividendo e no divisor, o quociente d'esses dous numeros, sendo a unidade, nada se escreve no quociente : foi justamente o que aconteceo no exemplo supra com o factor 3 ; o quociente é pois $2 \times 5 \times 7$.

Determinação de todos os divisores de um numero.

170. Procuremos todos os divisores de 360 por exemplo; decompondo 360 primeiramente em seos factores primos, achamos

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5 ;$$

todo divisor de 360 só poderá conter os factores 2, 3 e 5, o primeiro não podendo ser elevado senão até á terceira potencia, o segundo até á segunda, e o ultimo até á primeira. Reciprocamente, um producto qualquer d'esses factores, cujos ex-

poentes não fôrem maiores que aquelles de que já fallámos, será um divisor de 360; por conseguinte, para termos todos os divisores de 360, formaremos os productos d'esses factores um a um, dous a dous, tres a tres. Para chegarmos a este fim escreveremos as differentes potencias de cada factor em linhas horizontaes, collocando no principio de cada linha a unidade, sem omittir factor algum:

$$\alpha \begin{cases} 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3 & (1) \\ 1,\ 3,\ 3^2, & (2) \\ 1,\ 5; & (3) \end{cases}$$

multiplicando cada numero da linha (1) por cada factor da linha (2), temos os seguintes numeros:

$$\beta \begin{cases} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3 \\ 3^2, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^3\times 3^2 \end{cases}$$

que multiplicados por cada numero da linha (3) fórmão os seguintes:

$$\gamma \begin{cases} 1, & 2, & 2^2, & 3^8 \\ 3, & 2\times 3, & 2^2\times 3, & 2^3\times 3^2 \\ 3, & 2\times 3^2, & 2^2\times 3^2, & 2^5\times 4^2 \\ 5, & 2\times 5, & 2^2\times 5, & 2^3\times 5 \\ 3\times 5, & 2\times 3\times 5, & 2^2\times 3\times 5, & 2^3\times 3\times 5 \\ 3^2\times 5, & 2\times 3^2\times 5, & 2^2\times 3^2\times 5, & 2^3\times 3^2\times 5. \end{cases}$$

que são todos os divisores do numero 360, logo que se tiverem effectuado as multiplicações.

Escrevemos a unidade em frente de cada linha horizontal, em primeiro lugar porque 1 é divisor, e em segundo para que os divisores (α) não se percaõ, e reappareçaõ em (β), e para que os dtvisores (β) figurem todos no ultimo quadro (γ), que encerra assim todos os divisores do numero 360.

Observação. O primeiro divisor é a unidade, e o ultimo é o proprio numero.

171. Regra. *Um numero sendo dado para formar todos os seos divisores, decompõe-se esse numero em seos factores primos; escrevem-se em linhas horizontaes as differentes potencias de cada factor, collocando no principio de cada uma a unidade; multiplica-se a primeira linha por cada factor da segunda, os numeros assim obtidos por cada factor da terceira, e assim por diante; os ultimos productos obtidos são os differentes divisores do numero dado.*

Numero dos divisores de um numero.

172. Theorema. *O numero total dos divisores de um numero (comprehendida a unidade e o proprio numero) é igual ao producto dos expoentes dos differentes factores primos, que o compoem, cada um d'esses expoentes sendo augmentado com uma unidade.*

Seja N o numero dado, e supponhamos:

$$N = a^n . b^{n'} . c^{n''}.$$

Vimos que para formar-se todos os divisores de N, era necessario escrever :

$$\begin{array}{l} 1, a, a^2, a^3 \ldots\ldots\ldots a^n \\ 1, b, b^2, b^3 \ldots\ldots\ldots b^{n'} \\ 1, c, c^2, c^3 \ldots\ldots\ldots c^{n''}; \end{array}$$

multiplicar a primeira linha pelos factores da segunda, os productos pelos factores da terceira. A primeira linha contem $(n+1)$ termos; o numero dos productos dos termos d'esta linha por um termo qualquer da segunda, é $(n+1)$, e como ha $(n'+1)$ termos na segunda, haverá $(n+1)(n'+1)$ divisores no fim da multiplicação dos termos da primeira linha pelos termos da segunda; estes $(n+1)(n'+1)$ divisores são multiplicados por cada um dos termos da terceira, o que fornece por

conseguinte $(n+1)(n'+1)$ divisores, e como ha $(n''+1)$ termos na terceira, o numero total dos divisores no fim da multiplicação pelos termos da terceira será $(n+1)(n'+1)(n''+1)$.

o. q. e. n. d.

Observação. Este theorema permitte verificar na formação de todos os divisores de um numero, se o numero de divisores está completo.

173. Theorema II. *Todo o numero que é uma segunda potencia exacta tem um numero impar de divisores, e todo o numero que não é segunda potencia exacta tem um numero par de divisores, e reciprocamente.*

Seja $n = a^2$.

Vimos que se n tem um divisor $d < a$, tem outro $d' < a$; em geral a todo divisor de n menor que a corresponde outro maior que a, de maneira que os differentes divisores de n podem ser dispostos dous a dous, um d'elles sendo menor, e o outro maior que a; ha por conseguinte um numero par d'esses divisores, e como a é tambem divisor, logo o numero total é impar.

O numero não sendo quadrado perfeito o divisor a desapparece, e o numero de divisores é por conseguinte par.

Reciprocamente, quando o numero de divisores de um numero é impar, esse numero é quadrado perfeito; porque se o não fosse, o numero de divisores seria par: da mesma maneira quando o numero de divisoros é par, o numero não é quadrado perfeito, porque se o fosse, o numero de divisores seria impar.

Composição do maior divisor commum.

174. Theorema. *O maior divisor commum de muitos numeros é igual ao producto dos factores, que são communs a esses numeros, affectados cada um do menor expoente.*

Para que um numero seja divisivel por outro é necessario e sufficiente que este não contenha outros factores senão aquelles

que se achão no dividendo, e effectados cada um de um expoente, quando muito, igual (nº 169); por conseguinte um numero que fôr formado de factores communs aos numeros dados e affectados cada um do menor expoente, será um divisor commum d'esses numeros; é claro que obteremos o maior divisor commum dos numeros dados, fazendo o producto de todos os factores communs aos numeros dados e affectados cada um do menor expoente.

Por exemplo o maior divisor commum dos numeros:

$$19404 = 2^2 . 3^2 . 7^2 . 11$$
$$10164 - 2^2 . 3 . 7 . 11^2$$
$$8316 = 2^2 . 3^3 . 7 . 11$$
$$6468 = 2^2 . 3 . 7^2 . 11$$

é

$$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 = 924.$$

Obtem-se pois o maior divisor commum de muitos numeros, decompondo-os em seos factores primos, e empregando o theorema precedente.

175. *Observação*. Conhecendo o maior divisor commum, será facil obter todos os divisores communs dos numeros dados, pois são os divisores do maior divisor commum; assim no exemplo precedente os divisores communs aos numeros dados são os divisores de 924, cujo numero é 24.

Composição do menor multiplo commum.

166. Theorema. *O menor multiplo commum de muitos numeros é igual ao producto dos factores differentes, que se achão nos numeros dados, affectados cada um do maior expoente.*

O menor multiplo commum de muitos numeros é um numero que deve ser dividido por elles; porém sabemos que, para que um numero seja divisivel por outro é necessario que contenha todos os factores d'este outro, affectados cada um de um expoente ao menos igual (nº 169); logo, para que um numero seja o menor multiplo de muitos outros é necessario que con-

tenha todos os factores differentes, que se achão n'esses numeros, affectados cada um do maior expoente.

Assim, o menor multiplo dos numeros precedentes é $2^2. 3^3. 7^2. 11^2$, o que faz 640332.

Decompondo os numeros em seos factores primos, e empregando o theorema precedente obtem-se mais facilmente o menor multiplo commum, cuja applicção é frequente em Arithmetica.

Observação. Os multiplos de 640332 são os multiplos dos numeros dados.

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *Demonstrar que, dividindo as potencias a, a^2, a^3... a^n de um numero qualquer a, n sendo primo com a, um dos restos ao menos é igual á unidade.*

Solução. Sendo n primo com a é tambem primo com uma potencia qualquer a^p de a, de maneira que:

$$a^p = a.\,q + r.$$

Ora ha n potencias differentes, logo ha n restos; se estes são todos differentes, um d'elles é igual á unidade; supponhamos porém que dous d'esses restos sejão iguaes e que:

$$a^p = n.\,q + r$$

e

$$a^{p+\alpha} = n.\,q' + r;$$

diminuindo a primeira da segunda igualdade temos:

$$a^p.\,(a^\alpha - 1) = n.\,(q' - q);$$

n sendo primo com a, é preciso que $(a^\alpha - 1)$ seja divisivel por n, isto é:

$$a^\alpha - 1 = n.\,Q$$

ou

$$a^\alpha = n.\,Q + 1;$$

assim, quando mesmo dous restos sejão iguaes, uma das potencias pelo menos dá lugar a um resto igual á unidade.

II. *De quantas maneiras um numero inteiro N pode ser decomposto em dous factores inteiros?*

Solução. Suppondo $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma}$, o numero n de divisores de N é

$$(1+\alpha)\times(1+\beta)\times(1+\gamma)\,;$$

se N não é quadrado perfeito, a cada divisor p maior que $\sqrt{N}$ corresponde outro q menor que $\sqrt{N}$, logo

$$\frac{1}{2}\Big[(1+\alpha)\times(1+\beta)\times(1+\gamma)\Big]$$

é o numero pedido ; se N é quadrado perfeito será facil ver-se que

$$\frac{1}{2}\Big[(1+\alpha)\times(1+\beta)\times(1+\gamma)+1\Big]$$

é o numero pedido (nº 173).

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

III. *Se* a *e* b *são primos entre si ;* a. b *será primo com* a + b.

IV. *Todo numero primo é igual a um multiplo de* 3 *mais ou menos uma unidade.*

V. *Todo numero primo é igual a um multiplo de* 4 *mais ou menos uma unidade.*

VI. *Todo numero primo é igual a um multiplo de* 6 *mais ou menos uma unidade.*

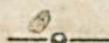
VII. *De quantas maneiras um numero pode ser decomposto em dous factores primos entre si?*

VIII. *O quadrado de um numero primo diminuido de uma unidade é divisivel por* 24.

IX. *Como se determinão todos os divisores communs a muitos numeros dados?*

X. *O producto de* n *numeros inteiros consecutivos é sempre divisivel pelo producto dos* n *primeiros numeros.*

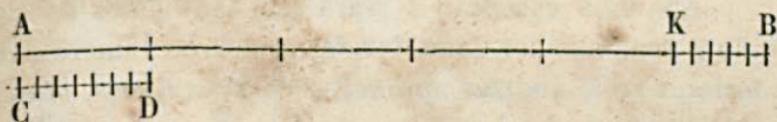
LIVRO III.

Theoria das fracções ordinarias. — Theoria dos numeros decimaes.

CAPITULO PRIMEIRO.

PROPRIEDADES DAS FRACÇÕES.

Definições.

177. A origem das fracções é a medida das grandezas continuas.

Supponhamos que se quer conhecer o valor da linha A B;

toma-se uma unidade homogenea CD e applicando esta unidade sobre AB, acha-se que AB é igual a cinco vezes CD mais um resto KB, menor que CD: não se pode ter a medida exacta de AB por meio de CD sem avaliar-se o resto KB; para o que divide-se CD em muitas partes iguaes, em sete por exemplo, e examina-se quantas d'essas partes contem o resto KB; no exemplo acima KB contem cinco partes de CD, ou cinco

partes da unidade, dividida em sete partes iguaes, e então diz-se que AB vale cinco unidades mais cinco vezes a septima parte da unidade, o que se escreve :

$$5 + \frac{5}{7};$$

e lê-se : *cinco mais cinco septimos.*

O numero $5 + \frac{5}{7}$ é dito *fraccionario ;* é aquelle que é composto de unidades inteiras e de partes da unidade. A parte $\frac{5}{7}$ do numero acima chama-se *fracção* ou *quebrado.*

Uma fracção é pois a reunião de muitas partes da unidade, dividida em partes iguaes.

Toda fracção se compõe de dous numeros, *denominador* e *numerador ;* o primeiro indica em quantas partes a unidade foi divida, e o segundo quantas d'essas partes se tomárão. O numerador e denominador chamão-se tambem *termos* da fracção.

Escreve-se uma fracção, escrevendo o numerador e denominador, e separando-os por um risco horizontal.

Lê-se uma fracção, enunciando o seo numerador depois o seo denominador, seguido da terminação *avos.* Lê-se a fracção $\frac{3}{122}$: *trez cento e vinte e dous avos.*

Ha porém uma excepção á regra que acabámos de dar; quando o denominador é um dos dez primeiros numeros, diz-se : *meios, terços, quartos, quintos, sextos, septimos, oitavos, nonos, decimos ;* assim leem-se as seguintes fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$; *dous terços, seis septimos,* etc.

Principios.

178. PRINCIPIO I. *Uma fracção é igual ao quociente da divisão de seo numerador pelo seo denominador.*

Assim $\frac{14}{5}$ representa o quociente da divisão de 14 por 5, ou o quinto de 14; com effeito, o quinto de 14 contem o quinto de cada uma das unidades, que compõem o numero 14; isto é 14 vezes o quinto de uma unidade ou 14 quintos de uma unidade; isto é, $\frac{14}{5}$.

179. *Observação.* Este theorema permitte exprimir o quociente da divisão de dous numeros, que não são divisiveis exactamente um pelo outro; assim digo que, o quociente da divisão de 47 por 7 é $6+\frac{5}{7}$, 5 sendo o resto d'essa divisão.

Com effeito, 47 sendo igual a $42+5$, será facil ver-se que:

$$\frac{47}{7}=\frac{42+5}{7}=\frac{42}{7}+\frac{5}{7}=6+\frac{5}{7},$$

$6+\frac{5}{7}$ é pois o quociente da divisão de 47 por 7, por isso que $\frac{5}{7}$ exprime o quociente da divisão de 5 por 7.

Assim, *o quociente da divisão de dous numeros, não divisiveis um pelo outro, se compõe de uma parte inteira, e de uma fracção que tem por denominador o divisor, e por numerador o resto da divisão.*

REDUCÇÃO DE UM NUMERO FRACCIONARIO Á FORMA DE FRACÇÃO. — EXTRACÇÃO DOS INTEIROS CONTIDOS EM UMA EXPRESSÃO FRACCIONARIA.

180. A questão que se vai tratar não é mais do que uma applicação do paragrapho precedente.

I Supponhamos que se quer reduzir á forma de fracção o numero fraccionario $6+\frac{5}{7}$.

Pelo que se disse (nº 179), o numero proposto representa o

quociente da divisão de um numero desconhecido D por 7, assim:

$$\frac{D}{7}=\left(6+\frac{5}{7}\right); \qquad (1)$$

multiplicando por 7 a igualdade (1), obtem-se

$$D=\left(6+\frac{5}{7}\right)\times 7=6\times 7+\frac{5}{7}\times 7 \text{ (nº 77)} =$$

$$=6\times 7+\frac{5\times 7}{7} \text{ (nº 47)} = 6\times 7+5 \text{ (nº 52 — corl.)},$$

por conseguinte:

$$\frac{D}{7}=\frac{6\times 7+5}{7},$$

logo:

$$6+\frac{5}{7}=\frac{6\times 7+5}{7}$$

Regra. *Para reduzir um inteiro e uma fracção a uma expressão fraccionaria, multiplica-se o inteiro pelo denominador da fracção, ajunta-se ao producto o numerador, e dá-se á somma por denominador o denominador da fracção.*

Pode-se chegar a esta mesma regra pelas considerações seguintes:

Uma unidade valendo sete septimos $\left(\frac{7}{7}\right)$, 6 unidades valem 6×7 septimos e mais 5 septimos fazem $6\times 7+3$ septimos, ou $\frac{6\times 7+3}{7}$. *o. q. e. n. d.*

II. Como uma fracção em geral exprime o quociente da divisão de seo numerador pelo seo denominador, *extrahem-se os inteiros contidos em uma fracção, dividindo o numerador pelo denominador*; o quociente exprime a parte inteira, e a expressão dada se compõe d'essa parte inteira e de uma fracção que tem por denominador o denominador da expressão, e por numerador o resto da divisão do numerador pelo denominador; assim: $\frac{122}{9}=13+\frac{5}{9}$.

Pode-se chegar ao mesmo fim pelo raciocinio seguinte : uma unidade valendo nove nonos $\left(\frac{9}{9}\right)$, tantas vezes $\frac{9}{9}$ serão contidos em $\frac{122}{9}$, ou melhor ainda tantas vezes 9 será contido em 122, quantas unidades inteiras conterá $\frac{122}{9}$; logo dividindo 122 por 9, o quociente 13 representa os inteiros contidos na expressão dada.

Observação. Quando o numerador de uma fracção é menor que seo denominador, a fracção representa uma quantidade menor que a unidade; é uma *fracção propriamente dita.* Quando o numerador é igual ao denominador, a fracção é igual á *unidade.* Quando o numerador é maior, a fracção representa uma quantidade maior que a unidade, e chama-se *numero fraccionario :* geralmente dá-se o nome de fracção a toda expressão da forma $\frac{m}{n}$, m e n, sendo dous numeros inteiros quaesquer.

181. Principio II. *Todo numero inteiro é igual a uma fracção que tem por denominador a unidade, assim* $15 = \frac{15}{1}$.

182. Principio III. *Logo que duas fracções teem mesmo denominador e numeradores differentes, a que tem maior numerador, é a maior.*

A fracção $\frac{19}{37}$ é maior que a fracção $\frac{15}{37}$; porque a primeira comtem um numero maior de partes da unidade de mesma grandeza que as partes da segunda.

183. Principio IV. *De duas fracções que teem mesmo numerador e denominadores differentes, a maior é a que tem menor denominador.*

Com effeito, $\frac{37}{119}$ é maior que $\frac{37}{512}$; porque na primeira as partes, em que se acha dividida a unidade, sendo maiores que as partes da unidade na segunda, 37 partes da primeira serão maiores que 37 da segunda, logo a primeira fracção é maior que a segunda.

Vêr-se-ha mais adiante o meio para descobrir qual a maior de duas fracções dadas, tendo termos differentes.

Theoremas relativos ás fracções.

184. Theorema I. *Logo que se multiplica ou divide o numerador de uma fracção por um numero, a fracção torna-se esse mesmo numero de vezes maior ou menor.*

I. Assim, multiplicando por exemplo o numerador da fracção $\frac{5}{7}$ por 6, a fracção torna-se 6 vezes maior; porque a fracção resultante $\frac{30}{7}$ contem um numero seis vezes maior de partes da unidade de mesma grandeza que as partes da unidade na segunda.

II. Dividindo-se o numerador da fracção $\frac{20}{11}$, por 5, a fracção resultante $\frac{4}{11}$ será cinco vezes menor; com effeito, multiplicando o numerador de $\frac{4}{11}$ por 5, obtem-se a fracção proposta $\frac{20}{11}$, que em virtude da primeira parte da demonstração é cinco vezes maior que $\frac{4}{11}$; logo, reciprocamente, $\frac{4}{11}$ é cinco vezes menor que $\frac{20}{11}$.

185. Theorema II. *Logo que se multiplica ou divide o denominador de uma fracção por um numero, a fracção torna-se esse mesmo numero de vezes menor ou maior.*

I. Assim, multiplicando-se o denominador da fracção $\frac{3}{7}$ por 5, a fraccão $\frac{3}{35}$ será cinco vezes menor que a primeira; com effeito, a fracção $\frac{3}{35}$, assim como a fracção $\frac{3}{7}$, comtem o mesmo numero de partes da unidade; porém na primeira as partes

da unidade sendo cinco vezes menores, $\frac{3}{35}$ é por conseguinte cinco vezes menor que $\frac{3}{7}$.

II. Dividindo-se o denominador da fracção $\frac{3}{20}$ por 5, a fracção $\frac{3}{4}$ será cinco vezes maior que $\frac{3}{20}$; com effeito, multiplicando-se o denominador de $\frac{3}{4}$ por 5, a fracção resultante $\frac{3}{20}$ em virtude da primeira parte da demonstracção é cinco vezes menor que $\frac{3}{4}$; logo, reciprocamente, $\frac{3}{4}$ é cinco vezes maior que $\frac{3}{20}$.

186. THEOREMA III. *Logo que se multiplica ou divide os dous termos de uma fracção por um mesmo numero, a fracção não muda de valor.*

I. Com effeito, a fracção $\frac{5}{11}$ é 7 vezes maior que a fracção $\frac{5}{11 \times 7}$; mas a fracção $\frac{5 \times 7}{11 \times 7}$ é tambem 7 vezes maior que $\frac{5}{11 \times 7}$, logo $\frac{5}{11} = \frac{5 \times 7}{11 \times 7}$. *o. q. e. n. d.*

II. Seja a fracção $\frac{6}{15}$, dividindo os dous termos por 3, $\frac{2}{5}$ será igual a $\frac{6}{15}$.

Com effeito, multiplicando-se os dous termos da fracção $\frac{2}{5}$ por 3, a fracção $\frac{6}{15}$ é igual a $\frac{2}{5}$ em virtude da primeira parte da demonstração; logo, reciprocamente, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$.

187. THEOREMA IV. *Logo que se ajunta aos dous termos de uma fracção propriamente dita uma mesma quantidade, a fracção augmenta no valor; e se a quantidade que se ajunta cresce indefinidamente, a fracção augmenta successivamente no valor, e tem por limite a unidade.*

187. Seja $\frac{a}{b}$, uma fracção propriamente dita, tal que $a < b$;

ajuntado-se aos dous termos de $\frac{a}{b}$ uma mesma quantidade m, $\frac{a+m}{b+m}$ será maior que $\frac{a}{b}$; com effeito, é facil ver-se que:

$$1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}, \quad \text{e} \quad 1-\frac{a+m}{b+m}=\frac{b-a}{b+m};$$

a fracção $\frac{b-a}{b}$ é maior que $\frac{b-a}{b+m}$ (nº 183), logo $\frac{a}{b}$ é menor que $\frac{a+m}{b+m}$.

Qualquer que fôr o valor de m, a fracção $\frac{b-a}{b+m}$ terá sempre por numerador $b-a$; logo o numerador é uma quantidade constante: já não acontece assim com o denominador $b+m$, que cresce com a quantidade m; logo a fracção $\frac{b-a}{b+m}$, cujo numerador é constante, e cujo denominador pode tornar-se maior que toda grandeza dada, pode tornar-se menor que qualquer quantidade dada, e concebe-se que se m toma um valor muito grande, a fracção toma outro muito pequeno e tem por limite zero: porém logo que a differença $\frac{b-a}{b+m}$ de duas quantidade 1, $\frac{a+m}{b+m}$ tem por limite zero, essas quantidades são iguaes no limite; logo:

$$\lim.\frac{a+m}{b+m}=1. \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

188. Theorema V. *Se aos dous termos de um numero fraccionario se ajunta uma mesma quantidade, o valor do numero fraccionario diminue; e se a quantidade, que se ajunta, cresce indefinidamente, o valor do numero fraccionario diminue successivamente, e tem por limite a unidade.*

A demonstração d'este theorema é identica á do precedente, e deixamol-a ao leitor.

NOÇÕES SOBRE OS LIMITES.

189. Julgamos util dar aqui algumas idéas sobre o que se chama quantidade *variavel*, e *limite* dos valores de uma variavel.

Uma quantidade é dita *variavel*, logo que pode receber differentes valores, e *constante*, logo que conserva o mesmo valor durante o curso de um calculo.

A natureza da questão indica quaes são as quantidades variaveis, e as constantes; no theorema, que ainda ha pouco se demonstrou, m é uma quantidade variavel, a e b são constantes.

Quando os valores de uma quantidade variavel se approximão de outra fixa e determinada, de maneira que diffirão d'esta ultima de uma quantidade tão pequena quanto se queira, esta quantidade fixa é o *limite* dos valores da variavel; é assim que no theorema precedente, logo que m toma valores que crescem indefinidamente, a fracção $\frac{a+m}{b+m}$ cresce successivamente e approxima-se de uma quantidade fixa a unidade, da qual pode differir de tão pouco quanto se queira: a unidade é pois o *limite* da expressão $\frac{a+m}{b+m}$, logo que m cresce indefinidamente.

Simplificação das fracções.

190. Simplificar uma fracção é buscar outra fracção que tenha mesmo valor que a primeira, porém que seja representada por numeros mais simples.

O theorema III (nº 186) permitte operar esta simplificação. Seja a fracção $\frac{26136}{43560}$, que se quer reduzir a outra que tenha

termos mais simples; dividindo por 8, 9, 11 e 11 os dous termos da fracção dada, tem-se:

$$\frac{26136}{43560}=\frac{3267}{5445}=\frac{363}{605}=\frac{33}{55}=\frac{3}{5};$$

por aqui vê-se a grande utilidade da simplificação das fracções; passou-se de uma fracção $\frac{26136}{43560}$, de cujo valor não se podia ter idéa alguma, á outra $\frac{3}{5}$ muito simples e que permitte julgar do valor da fracção dada. Por ora não sabemos se $\frac{3}{5}$ é a fracção de termos mais simples, que possa exprimir o valor da fracção dada; não se continuou a simplificação; porque os dous termos da fracção $\frac{3}{5}$ sendo primos entre si, não admittem divisor algum commum: vamos agora explicar até onde a operação deve ser levada, e os meios mais rapidos para chegar-se a esse fim.

Reducção de fracções á expressão mais simples que é possivel.

191. A fracção, cujo valor não pode ser expresso por fracção alguma, que tenha termos mais simples, chama-se *irreduzivel.*

192. Lemma. *Toda a fracção, cujos termos são numeros primos entre si, não pode ser igual a outra, sem que os termos d'esta sejão equimultiplos dos d'aquella.*

Seja $\frac{a}{b}$ uma fracção tal que, a e b são primos entre si, $\frac{a'}{b'}$ outra tal que:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}; \qquad (1)$$

a' será um multiplo de a, b' um multiplo de b pelo mesmo numero :

A igualdade (1) dá :

$$\frac{a \times b'}{b} = a' ; \qquad (2)$$

a' sendo um numero inteiro, é necesario que $\frac{a \times b'}{b}$ tambem o seja ; para o que é preciso que $a \times b'$ seja divisivel por b ; porém b sendo primo com a por hypothese, deve dividir o outro factor b' ; logo :

$$b' = b \times m ; \qquad (3)$$

escrevendo em (2) $m \times b$ em lugar de b', tem-se :

$$a' = \frac{a \times b \times m}{b} = a \times m$$

logo

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a \times m}{b \times m} . \qquad \textit{o. q. e. n. d.}$$

193. THEOREMA I. *Toda a fracção, cujos termos são numeros primos entre si, é irreduzivel.*

Com effeito, se a fracção não fosse irreduzivel, seo valor poderia ser representado por outra de termos mais simples ; porém pelo lemma precedente os termos de toda fracção, igual á fracção proposta, são maiores que os termos d'esta ; logo, não existe outra fracção que tenha termos mais simples ; logo, a fracção é irreduzivel.

194. THEOREMA II. *Reciprocamente, os termos de uma fracção irreduzivel são sempre primos entre si.*

Com effeito, se o não fossem, admittirião um divisor commum, e a fracção não seria irreduzivel.

195. THEOREMA III. *Duas fracções irreduziveis iguaes teem seos numeradores iguaes, assim como seos denominadores.*

Por isso que uma d'ellas é irreduzivel, a outra não lhe pode ser igual, se seos termos não são equimultiplos dos dous da primeira; porém a segunda tambem é irreduzivel, logo é necessario que seos termos sejão respectivamente iguaes aos da primeira.

Dos theoremas precedentes resultão os seguintes corollarios:

196. COROLLARIO I. *Para reduzir uma fracção á sua expressão mais simples, basta dividir seos termos pelo seo maior divisor commum.*

Com effeito, dividindo-se os dous termos da fracção pelo seo maior divisor commum, os quocientes são primos entre si, logo a fracção resultante é irreduzivel.

197. COROLLARIO II. *Para formar-se todas as fracções equivalentes a uma fracção irreduzivel dada, bastará multiplicar seos termos pela serie natural dos numeros.*

Observação. Quando se trata de simplificar uma fracção na pratica, não se procura logo o maior divisor commum dos dous termos da fracção, operação que é ordinariamente longa; procede-se pelos caractères de divisibilidade, que se conhece, e quando se tem chegado a uma fracção, de cujos termos não se conhece mais divisor algum, então busca-se o maior divisor commum, e procede-se da maneira que se indicou.

Proponhamo-nos a simplificar a fracção $\frac{3171168}{7927920}$. Dividindo os dous termos por 8, 2, 9, 11, e depois por 11, temos a seguinte serie de fracções equivalentes:

$$\frac{3171168}{7927920}=\frac{396396}{990990}=\frac{198198}{495495}=\frac{22022}{55055}=\frac{2002}{5005}=\frac{182}{455}$$

não conhecendo á primeira vista divisor algum dos dous termos da ultima fracção $\frac{182}{455}$, procuremos o maior divisor commum d'esses dous numeros, que achamos ser 91; dividindo os dous termos d'essa fracção por 91, temos:

$$\frac{182}{455} = \frac{2}{5}$$

assim :

$$\frac{3171168}{7927920} = \frac{2}{5}.$$

198. THEOREMA IV. *Muitas fracções sendo iguaes entre si, a somma de seos numeradores dividida pela somma de seos denominadores é uma fracção igual a cada uma das fracções dadas.*

Sejão $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$ as fracções dadas, trata-se de demonstrar que :

$$\frac{a+a'+a'}{b+b'+b'} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}.$$

Representando $\frac{p}{q}$ a fracção irreduzivel igual a cada uma das fracções dadas, temos :

$$\frac{a}{b} = \frac{m \times p}{m \times q},\ \frac{a'}{b'} = \frac{m' \times p}{m' \times q},\ \frac{a''}{b''} = \frac{m'' \times p}{m'' \times q} \text{ (nº 192)},$$

d'onde :

$$\begin{aligned} a &= m \times p \\ a' &= m' \times p \\ a'' &= m'' \times p \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} b &= m \times q \\ b' &= m' \times q \\ b'' &= m'' \times q ; \end{aligned}$$

fazendo a somma d'essas igualdades membro a membro :

$$a + a' + a'' = (m + m' + m'').p,$$

e

$$b + b' + b'' = (m + m' + m'').\ q$$

e dividindo membro a membro as duas ultimas, temos :

$$\frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} = \frac{(m + m' + m'') \times p}{(m + m' + m'') \times q} = \frac{p}{q}$$

supprimindo o factor commum $n + m' + m''$; logo :

$$\frac{a + a' + a''}{b + b + b''} = \frac{a}{b} = \text{etc.} \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Reducção de fracções ao mesmo denominador e ao menor denominador commum.

199. Reduzir duas ou mais fracções ao mesmo denominador é transformal-as em outras equivalentes, que tenhão o mesmo denominador.

Sendo dadas muitas fracções, cujos termos fossem differentes, não se poderia dispol-as por ordem de grandeza sem reduzil-as todas a terem o mesmo numerador ou o mesmo denominador; a reducção ao mesmo denominador permitte não somente collocar as fracções por ordem de grandeza, como ainda determinar de quanto uma excede á outra, o que não acontece com a reducção ao mesmo numerador.

Para tratar a questão de uma maneira geral, sejão $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{i}{r}$, differentes fracções que se quer reduzir ao mesmo denominador D; representando x, x', x'', x''' os numeradores das fracções equivalentes, tem-se :

$$\frac{x}{D} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x'}{D} = \frac{c}{d}, \quad \frac{x''}{D} = \frac{m}{n}, \quad \frac{x'''}{D} = \frac{i}{r};$$

d'onde :

$$x = \frac{a \times D}{b}, \quad x' = \frac{c \times D}{d}, \quad x'' = \frac{m \times D}{n}, \quad x''' = \frac{i \times D}{r};$$

os differentes numeradores x, x', x'', x''' são numeros inteiros; logo é necessario que $a \times D$ seja divisivel por b, que $c \times D$ seja divisivel por d, etc; porém, como suppoem-se as fracções irreduziveis, b é primo com a, logo é necessario que divida

D; d sendo primo com c é necessario que divida D, etc; vê-se por ahi que D deve ser um multiplo de todos os denominadores das fracções dadas.

Como a simplicidade no calculo das fracções é cousa de muita importancia, não se toma por denominador commum um multiplo qualquer dos denominadores das fracções dadas, porém o menor multiplo d'esses denominadores.

Para achar os numeradores, observando as ultimas igualdades, divide-se o denominador commum pelo denominador da fracção em questão, e multiplica-se o quociente pelo numerador.

Proponhamo-nos a reduzir ao mesmo denominador as seguintes fracções :

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{5}{9}, \frac{5}{12}, \frac{3}{20}, \frac{11}{18};$$

o menor multiplo dos denominadores sendo 180, o denominador commum será 180; dividindo 180 por cada um dos denominadores das fracções e multiplicando os quocientes pelos numeradores respectivos, formamos as seguintes fracções :

$$\frac{30}{180}, \frac{10}{180}, \frac{90}{180}, \frac{120}{180}, \frac{84}{180}, \frac{100}{180}, \frac{75}{180}, \frac{27}{180}, \frac{110}{180},$$

equivalentes ás primeiras e tendo o mesmo denominador.

Sejão ainda as seguintes fracções :

$$\frac{4}{21}, \frac{3}{25}, \frac{8}{35}, \frac{2}{27}, \frac{5}{18}, \frac{11}{45}, \frac{7}{36}, \frac{43}{180}, \frac{19}{135}$$

O menor multiplo de todos os denominadores sendo 18900, o denominador commum das novas fracções é 18900; dividindo 18900 por cada um dos denominadores e multiplicando os quocientes pelos numeradores correspondentes, obtem-se as seguintes fracções, equivalentes ás primeras:

$$\frac{3600}{18900},\ \frac{2268}{18900},\ \frac{4320}{18900},\ \frac{14[illegible]0}{189[illegible]0},\ \frac{5250}{18900},\ \frac{4620}{18900},$$

$$\frac{3675}{18900},\ \frac{1365}{18900},\ \frac{2660}{18900}.$$

Logo que os denominadores das fracções dadas são numeros primos entre si, o menor multiplo d'esses numeros é o producto de todos os denominadores; por conseguinte o denomidor commum das fracções equivalentes ás fracções dadas será o producto dos denominadores d'estas fracções; para obter os numeradores vio-se *em geral* que era necessario dividir o denominador commum pelo denominador de cada fracção, e multiplicar o quociente pelo numerador da fracção que se considera; logo para obter os numeradores multiplicar-se-ha o numerador de cada fracção pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Reduzamos ao mesmo denominador as seguintes fracções :

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{7},\quad \frac{5}{11},$$

cujos denominadores são primos entre si; o denominador commum será $2\times 3\times 5\times 7\times 11$, e as fracções equivalentes ás fracções dadas serão :

$$\frac{3\times5\times7\times11}{2\times3\times5\times7\times11},\ \frac{2\times2\times5\times7\times11}{2\times3\times5\times7\times11},\ \frac{2\times3\times3\times7\times11}{2\times3\times5\times7\times11},$$

$$\frac{2\times3\times5\times4\times11}{2\times3\times5\times7\times11},\ \frac{2\times3\times5\times7\times5}{2\times3\times5\times7\times11},$$

o que dá, effectuando os calculos :

$$\frac{1155}{2310}\quad \frac{1540}{2310}\quad \frac{1386}{2310}\quad \frac{1320}{2310}\quad \frac{1050}{2310}.$$

Applicação da theoria precedente.
Conversão de um numero inteiro ou de uma fracção em outra fracção que tenha por denominador um numero dado.

199. THEOREMA I. *Todo numero inteiro pode ser transformado em uma fracção, que tenha por denominador um numero dado.*

Seja n um numero inteiro que se quer transformar em uma fracção que tenha por denominador m. Sabe-se que:

$$n = \frac{n}{1};$$

multiplicando os dous termos da fracção $\frac{n}{1}$ por m, o que não muda o valor da fracção, temos :

$$n = \frac{n \times m}{m};$$

logo, *para transformar um numero inteiro em uma fracção de denominador dado, basta multiplicar o numero inteiro pelo denominador dado, e tomar esse producto por numerador.*

Assim é por exemplo que :

$$15 = \frac{15 \times 7}{7} = \frac{105}{7}.$$

200. THEOREMA II. *Toda fracção dada pode ser transformada em outra que tenha por denominador um numero dado.*

Trata-se de converter a fracção $\frac{a}{b}$ em outra que tenha por

denominador o numero m. Chamando n o numerador da nova fracção, é claro que se pode pôr :

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{b},$$

d'onde

$$n = \frac{a \times m}{b};$$

logo, *para achar-se o numerador da fracção equivalente basta dividir o denominador dado, pelo denominador da fracção dada, e multiplicar o quociente pelo numerador.*

É justamente a regra achada para a reducção de fracções ao mesmo denominador.

Para que esta transformação seja possivel, é necessario que o denominador dado seja divisivel pelo denominador da fracção dada ; suppõe-se sempre que a fracção dada é irreduzivel.

Applicando á fracção $\frac{3}{4}$ a regra precedente, o denominador dado sendo 40, acha-se :

$$\frac{3}{5} = \frac{24}{40}.$$

Quando a condição supra não é preenchida ; isto é, quando o novo denominador não é divisivel pelo denominador da fracção dada, a transformação não é possivel ; n'este caso converter uma fracção $\frac{a}{b}$ em outra $\frac{x}{m}$ é determinar o maior multiplo de $\frac{1}{m}$ contido na fracção $\frac{a}{b}$.

Converter $\frac{3}{7}$ em uma fracção que tenha por denominador 135, é buscar o maior multiplo de $\frac{1}{135}$ contido na fracção $\frac{3}{7}$.
De

$$\frac{x}{135} = \frac{3}{7}$$

tira-se :

$$n = \frac{3 \times 135}{7} = 57 + \frac{6}{7};$$

57 é pois o maior numero de $\frac{1}{135}$ contido em $\frac{3}{7}$; a fracção $\frac{57}{135}$ é o valor da fracção $\frac{3}{7}$ *á* $\frac{1}{135}$ *proximo* ; isto quer dizer que, o erro que se commette tomando $\frac{57}{135}$ por valor de $\frac{3}{7}$ é menor que $\frac{1}{135}$. O valor exacto da fracção $\frac{3}{7}$ é $\frac{57+\frac{6}{7}}{135}$.

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *Duas fracções irreduziveis não podem ter por somma um numero inteiro se não tiverem o mesmo denominador.*

Solução. Sendo S a somma das duas fracções irreduziveis $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; temos

$$S = \frac{a}{b} + \frac{c}{d},$$

d'onde se deduz

$$b.d.S = a.d + b.c;$$

b, divide $b.d.S$, e $b.c$, logo deve dividir $a.d$, e como é primo com a, deve dividir d; do mesmo modo veriamos que d deve dividir b, logo $b = d$.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

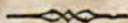
II. *Demonstrar que a somma dos numeradores de muitas fracções desiguaes dividida pela somma de seos denominadores é uma fracção comprehendida entre a menor e a maior das fracções dadas.*

III. Reduzir á expressão mais simples que é possivel as seguintes fracções :

$$\frac{105}{210},\ \frac{154}{462},\ \frac{936}{3744},\ \frac{1232}{6160},\ \frac{1848}{11088},\ \frac{21879}{153153}.$$

IV. Reduzir as fracções resultantes (probl. precedente) ao mesmo denominador 840.

V. Reduzir ao menor denominador commum as seguintes fracções :

$$\frac{5}{4752},\ \frac{7}{39204},\ \frac{13}{1054092},\ \frac{19}{5808},\ \frac{17}{2371842}.$$

CAPITULO II.

OPERAÇÕES SOBRE AS FRACÇÕES ORDINARIAS.

Addição.

201. A addição em geral, *é uma operação, que tem por fim buscar uma quantidade, que contenha todas as unidades e partes da unidade, que compõem muitos numeros dados.* Essa quantidade é o que se chama *somma.*

Esta definição é não mais do que uma generalisação da definição dada, quando se tratou dos numeros inteiros.

ADDIÇÃO DE DUAS OU MAIS FRACÇÕES.

Supponhamos que as fracções dadas tenhão o mesmo denominador, por exemplo :

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}$$

A unidade se acha dividida em nove partes ; a primeira fracção contem 4 d'essas partes, a segunda 3, a terceira 7 e a ultima 8 ; por conseguinte a somma conterá $4+3+7+8$ d'essas partes ; isto é

$$\frac{4+3+7+8}{9} \text{ ou } \frac{22}{9};$$

extrahindo da ultima os inteiros, temos emfim :

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}=2+\frac{4}{9}.$$

Proponhamo-nos a addicionar as seguintes fracções :

$$\frac{1}{21}+\frac{1}{36}+\frac{2}{15}+\frac{3}{7}+\frac{5}{18}$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, as fracções equivalentes são :

$$\frac{60}{1260}+\frac{35}{1260}+\frac{168}{1260}+\frac{540}{1260}+\frac{350}{1260}$$

cuja somma é igual a :

$$\frac{60+35+168+540+350}{1260} \text{ ou } \frac{1153}{1260}$$

da qual não se pode extrahir inteiros.

REGRA. *Addicionão-se muitas fracções, reduzindo-as ao mesmo denominador, ajuntando os numeradores das fracções equivalentes, e dando a esta somma por denominador o denominador commum.*

ADDIÇÃO DE NUMEROS FRACCIONARIOS.

Seja proposto, por exemplo, addicionar os numeros :

$$2+\frac{2}{3}, \quad 24+\frac{5}{7}, \quad 3+\frac{4}{9}, \quad 17+\frac{6}{27}$$

A somma das fracções :

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}$$

ou das equivalentes, reduzidas ao mesmo denominador :

$$\frac{126}{189}+\frac{135}{189}+\frac{84}{189}+\frac{182}{189}$$

é :

$$\frac{527}{189} = 2 + \frac{149}{189};$$

a somma dos inteiros é $2+24+3+17=46$; por conseguinte, a somma das quantidades dadas será :

$$46 + 2 + \frac{149}{189} \text{ ou } 48 + \frac{149}{189}.$$

Regra. *Para addicionar muitos numeros fraccionarios, addicionão-se as fracções, de cuja somma se extrahem os inteiros, que se ajuntão á somma dos inteiros, pertencentes aos numeros fraccionarios.*

Subtracção.

202. *A subtracção é uma operação, que tem por fim diminuir uma quantidade dada de todas as unidades e partes da unidade que compõem outra quantidade dada.*

O resultado da operação, e as duas quantidades dadas são denominadas da mesma maneira como nos numeros inteiros.

SUBTRACÇÃO DE DUAS FRACÇÕES.

Seja proposto o seguinte exemplo :

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{7}$$

A primeira fracção contem 6 partes da unidade, a segunda 3 de mesma grandeza; por conseguinte, a differença conterá $6-3$ d'essas partes ; isto é

$$\frac{6-3}{7} \text{ ou } \frac{3}{7}$$

Se as fracções não tivessem o mesm[o] denominador, por exemplo $\frac{29}{35} - \frac{16}{21}$, reduzir-se-hia em prim[e]iro lugar ao mesmo denominador e proceder-se-hia como precedentemente. Assim será facil ver-se que :

$$\frac{29}{35} - \frac{16}{21} = \frac{87}{105} - \frac{80}{105} = \frac{7}{105}$$

Regra. *Para subtrahir duas fracções uma da outra, reduzem-se as fracções ao mesmo denominador, subtrahe-se o menor numerador do maior, e dá-se á [d]ifferença por denominador o denominador commum.*

SUBTRAHIR UMA FRACÇÃO DE UM INTEIRO.

Pode-se chegar ao mesmo fim por dous meios differentes; seja proposto por exemplo subtrahir $\frac{2}{5}$ de 7.

I $7 - \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{5} - \frac{2}{5}$ (nº 199) $= \frac{35}{5} - \frac{2}{5} = \frac{33}{5} = 6 + \frac{3}{5}$

II. Em lugar de subtrahir $\frac{2}{5}$ de 7, pode-se tomar uma unidade de 7, subtrahir d'ella a fracção $\frac{2}{5}$, e ajuntar a differença a 6 ; assim

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

logo

$$7 - \frac{2}{5} = 6 + \frac{3}{5}.$$

O exemplo precedente indica perfeitamente a regra, que se deverá seguir n'este caso particular da subtracção das fracções.

SUBTRACÇÃO DE DOUS NUMEROS FRACCIONARIOS.

Ha tambem dous meios de fazer-se esta operação ; seja proposto subtrahir $17 + \frac{2}{5}$ de $28 + \frac{3}{7}$.

I. Se a fracção minuendo é maior que a fracção subtrahendo, fazendo a differença, e ajuntando-lhe a differença dos dous numeros inteiros, tem-se o numero pedido. Ora :

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{1}{35}, \text{ e } 28 - 17 = 11$$

logo

$$\left(28 + \frac{3}{7}\right) - \left(17 + \frac{5}{2}\right) = 11 + \frac{1}{35}$$

Se a fracção minuendo é menor que a outra, toma-se ao inteiro que lhe pertence uma unidade, que se ajunta á dita fracção, e opera-se como acabámos de fazer.

II. Obtem-se o mesmo resultado, reduzindo os numeros fraccionarios á forma de fracção, e operando como no caso de duas fracções.

Procedendo assim, temos :

$$\left(28 + \frac{3}{7}\right) - \left(17 + \frac{2}{5}\right) = \frac{199}{7} - \frac{87}{5} = \frac{1005}{35} - \frac{609}{35} =$$

$$= \frac{396}{35} = 11 + \frac{1}{35}.$$

Será facil concluir-se a regra d'este caso particular da subtracção.

Casos particulares :

1° $\quad 1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$

2º $$1-\frac{4}{9}=\frac{9}{9}-\frac{4}{9}=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}.$$

3º $$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1-\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=1-\frac{5}{6}=$$
$$=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{6-5}{6}=\frac{1}{6}.$$

4º $$\frac{17}{3}-1=\frac{17}{3}-\frac{3}{3}=\frac{17-3}{3}=\frac{14}{3}=4+\frac{2}{3}.$$

Multiplicação.

203. A definição, que se deo d'esta operação, quanto aos numeros inteiros, só tem lugar aqui quando, o multiplicando sendo uma quantidade qualquer, o multiplicador é numero inteiro, porém se o multiplicador é uma fracção, esta definição não tem mais sentido algum, e então diz-se :

Multiplicar uma quantidade qualquer por uma fracção é dividil-a em tantas partes iguaes, quantas unidades ha no denominador, e tomar tantas d'essas partes quantas unidades ha no numerador.

Assim multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$ é dividir $\frac{3}{4}$ em sete partes iguaes, e tomar 5 d'essas partes; isto significa que se deve tomar 5 vezes o septimo de $\frac{3}{4}$, ou os cinco septimos de $\frac{3}{4}$.

MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRACÇÃO POR UM INTEIRO.

Seja proposto multiplicar $\frac{4}{9}$ por 3, é claro, em virtude do que se disse (nº 184), que :

$$\frac{4}{9}\times 3=\frac{4\times 3}{9}, \quad \text{ou} \quad \frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{9:3}$$

Regra. *Para multiplicar uma fracção por um numero inteiro basta multiplicar o numerador da fracção, ou dividir o denominador por esse numero, quando é possivel.*

Observação. Quando se podér empregar o ultimo proceder, não se deixará de fazel-o, pois simplifica a fracção.

MULTIPLICAÇÃO DE UM NUMERO INTEIRO POR UMA FRACÇÃO.

Seja o numero 17 que se quer multiplicar por $\frac{3}{5}$.

Multiplicar 17 por $\frac{3}{5}$ é dividir 17 em 5 partes iguaes e tomar 3 d'essas partes; divide-se 17 em 5 partes iguaes, dividindo 17 por 5, o que dá $\frac{17}{5}$; e toma-se 3 d'essas partes, multiplicando $\frac{17}{5}$ por 3; isto é, $\frac{17 \times 3}{5}$; assim:

$$17 \times \frac{3}{5} = \frac{17 \times 3}{5}$$

Regra. *Para multiplicar um numero inteiro por uma fracção, basta multiplicar o inteiro pelo numerador da fracção, e dividir o producto pelo denominador.*

MULTIPLICAÇÃO DE DUAS FRACÇÕES.

Multiplicar por exemplo $\frac{6}{7}$ por $\frac{3}{5}$.

Multiplicar $\frac{6}{7}$ por $\frac{3}{5}$ é tomar os $\frac{3}{5}$ de $\frac{6}{7}$, o que se faz tomando primeiramente $\frac{1}{5}$ de $\frac{6}{7}$, que é $\frac{6}{7 \times 5}$, e repetindo 3 vezes este quinto, o que dá $\frac{6 \times 3}{7 \times 5}$; assim:

$$\frac{6}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6 \times 3}{7 \times 5}$$

Regra. *Para multiplicar duas fracções, multiplicão-se os numeradores entre si, assim como os denominadores.*

Observação. Antes de effectuar o producto, deve-se sempre supprimir os factores communs que podem existir. Assim:

$\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$, supprimindo o factor commum 7.

$\frac{7}{11} \times \frac{11}{3} = \frac{7}{3}$, supprimindo o factor commum 11.

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, supprimindo os dous factores communs 4 e 3.

$\frac{18}{25} \times \frac{5}{18} = \frac{1}{5}$, supprimindo os dous factores communs 18 e 5.

MULTIPLICAÇÃO DE DOUS NUMEROS FRACCIONARIOS.

Seja proposto multiplicar $\left(4 + \frac{3}{7}\right)$ por $\left(7 + \frac{5}{9}\right)$.

É facil ver-se que:

$$\left(4 + \frac{3}{7}\right) \times \left(7 + \frac{5}{9}\right) = \frac{4 \times 7 + 3}{7} \times \frac{7 \times 9 + 5}{9} = \frac{31}{7} \times \frac{68}{9} =$$
$$= \frac{31 \times 68}{7 \times 9} = \frac{2108}{63}$$

Regra. *Para multiplicar-se dous numeros fraccionarios, reduz-se cada um á forma de fracção, e applica-se a regra dada para o caso de duas fracções.*

204. *Observação* I. A regra dada para a multiplicação de duas fracções applica-se a todos os outros casos que examinámos; por isso que todo numero inteiro é considerado como uma fracção que tem a unidade por denominador, e que todo numero fraccionario pode ter a forma de fracção.

205. *Observação* II. O producto de uma quantidade qualquer por outra menor, igual, ou maior que a unidade, é outra

quantidade menor, igual, ou maior que o multiplicando. O producto de duas fracções é uma quantidade menor que cada factor.

Producto de muitas fracções.

206. Até aqui não considerámos senão o producto de duas fracções; pode acontecer que tendo-se effectuado o producto de duas fracções, se tenha ainda de multiplicar este producto por outra e assim successivamente. Esta operação é o que se chama *multiplicar uma fracção por muitas outras successivamente*.

Indica-se esta operação, como se segue :

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{9}{11}$$

Multiplicando a primeira pela segunda, temos a fracção:

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 5},$$

que multiplicada pela terceira $\frac{5}{6}$, dá a fracção :

$$\frac{2 \times 4 \times 7}{3 \times 5 \times 9}$$

que multiplicada pela quarta dá emfim a fracção :

$$\frac{2 \times 4 \times 7 \times 9}{3 \times 5 \times 9 \times 11}$$

que representa o producto das fracções dadas.

Regra. *Para multiplicar muitas fracções entre si, multiplicão-se todos os numeradores entre si assim como todos os denominadores.*

Observação I. Esta regra se applica a factores inteiros ou fraccionarios, por isso que os primeiros são considerados como fracções, que teem a unidade por denominadores, e os segundos podem ser reduzidos á forma de fracção.

Observação II. Assim como dividindo a unidade em partes iguaes, e tomando um certo numero d'essas partes, se formarão fracções da unidade, assim tambem dividindo uma fracção da unidade em muitas partes iguaes, e tomando um certo numero d'essas partes formão-se *fracçoes de fracção.*

Dividindo a fracção $\frac{4}{5}$ em sete partes iguaes, e tomando duas d'essas partes, forma-se uma fracção de fracção, que representa os dous septimos de $\frac{4}{5}$, que não é mais do que a seguinte fracção (nº 206):

$$\frac{2}{7} \times \frac{4}{5}, \quad \text{ou} \quad \frac{2 \times 4}{7 \times 5};$$

dividindo a ultima em nove partes iguaes, e tomando quatro d'essas partes, forma-se uma fracção da fracção $\frac{2 \times 4}{7 \times 5}$, que representa os seos quatro nonos, e uma fracção de fracção da fracção $\frac{4}{5}$, que vem a ser os $\frac{4}{9}$ dos $\frac{2}{7}$ de $\frac{4}{5}$, que não é mais do que,

$$\frac{4}{9} \times \frac{2}{7} \times \frac{4}{5}, \quad \text{ou} \quad \frac{4 \times 2 \times 4}{9 \times 7 \times 5};$$

e assim successivamente.

Pelo que se disse, vê-se que *fracções de fracção* é outra denominação dada ao producto de muitas fracçães, denominação que se acha hoje em desuso.

Divisão.

A divisão, em geral, *é uma operação que tem por fim, conhecendo-se o producto de dous factores e um d'elles, determinar o outro.*

DIVISÃO DE UMA FRACÇÃO POR UM NUMERO INTEIRO.

Seja proposto dividir $\frac{14}{25}$ por 7.

Pelo que vimos (n[os] 184, 185) será facil ver-se que :

$$\frac{14}{25} : 7 = \frac{14}{25 \times 7}, \quad \text{ou} \quad \frac{14}{25} = \frac{14 : 7}{25}.$$

REGRA. *Para dividir uma fracção por um numero inteiro, multiplica-se o denominador da fracção pelo inteiro ; ou divide-se o numerador pelo inteiro, quando é possivel.*

O ultimo methodo deve ser preferido, quando fôr possivel, pois simplifica a fracção.

DIVISÃO DE UM NUMERO INTEIRO POR UMA FRACÇÃO.

Seja 7 um numero, que queremos dividir pela fracção $\frac{3}{5}$.

Como o dividendo é o producto do divisor pelo quociente, chamando Q o quociente d'aquella divisão, temos :

$$7 = \frac{3}{5} \times Q ;$$

porém $\frac{3}{5} \times Q$ é a mesma cousa que os $\frac{3}{5}$ de Q ; por conseguinte, podemos escrever :

$$\frac{3}{5} \text{ de } Q = \text{[illegible]}$$

logo

$$\frac{1}{5} \text{ de } Q = \frac{7}{3}$$

e

$$\frac{5}{5} \text{ de } Q = Q = \frac{7 \times 5}{3} = 7 \times \frac{5}{3};$$

comparando o resultado com os numeros dados, conclue-se a seguinte regra.

Regra. *Para dividir um inteiro por uma fracção, multiplica-se o inteiro pela fracção, depois de ter-se invertido seos termos.*

DIVISÃO DE DUAS FRACÇÕES.

Dividir por exemplo $\frac{7}{9}$ por $\frac{3}{5}$.

Chamando Q o quociente d'esta divisão, temos :

$$\frac{7}{9} = \frac{3}{5} \times Q,$$

isto quer dizer que, os $\frac{3}{5}$ de Q igualão $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{5}$ de Q sera igual a $\frac{7}{9 \times 3}$, por conseguinte $\frac{5}{5}$ de Q, ou

$$Q = \frac{7 \times 5}{9 \times 3} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{3};$$

d'aqui resulta a seguinte regra :

Regra. *Para dividir uma fracção por outra, multiplica-se a fracção dividendo pela fracção divisor inversa.*

DIVISÃO DE DOUS NUMEROS FRACCIONARIOS.

Determinar por exemplo o quociente da divisão de $9 + \frac{4}{5}$ por $7 \times \frac{2}{3}$.

Reduzindo cada um á forma de fracção, e empregando sobre elles a regra ainda ha pouco estabelecida, temos :

$$\left(9 + \frac{4}{5}\right) : \left(7 + \frac{2}{3}\right) = \frac{9 \times 5 + 4}{5} : \frac{7 \times 3 + 2}{3} = \frac{49}{5} : \frac{23}{3} =$$

$$= \frac{49}{5} \times \frac{3}{23} = \frac{49 \times 3}{5 \times 23} = \frac{147}{115}.$$

Regra. *Para dividir um numero fraccionario por outro, reduzem-se esses numeros á forma de fracção, e opera-se da mesma maneira que sobre fracções propriamente ditas.*

Observação I. A regra que se deo para a divisão de duas fracções é geral, e convem a todos os casos, que se examinou, considerando porém um numero inteiro como uma fracção que tem a unidade por denominador, e tendo em vista que todo numero fraccionario pode adquerir a forma de fracção.

Observação II. O quociente de 1 pela fracção $\frac{3}{5}$ é a fracção inversa $\frac{5}{3}$; ella é dita o *inverso* de $\frac{3}{5}$. Em geral, o quociente de 1 por um numero qualquer é o *inverso* d'esse numero.

Potencias das fracções.

210. Chama-se *potencia* de uma fracção o producto de muitas fracções iguaes á primeira. O numero de factores, que entrão no producto, indica *o grão da potencia.*

Para indicar que uma fracção deve ser elevada a uma poten-

cia de gráo m, encerra-se a fracção entre parenthesis, e escreve-se á direita do parenthesis e um pouco acima o gráo da potencia, assim :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

indica que a fracção $\frac{a}{b}$ deve ser elevada a potencia m.

211. Theorema I. *Para elevar uma fracção a uma potencia de gráo* m, *basta elevar seos dous termos á mesma potencia.*

Com effeito :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots = \frac{a \times a \times a \times \ldots}{b \times b \times b \times \ldots} = \frac{a^m}{b^m}.$$

212 Theorema II. *Para que uma fracção possa ser potencia de outra, é preciso que seos dous termos sejão potencias de mesmo gráo.*

Supponhamos que $\frac{a}{b}$, fracção irreduzivel, seja a potencia m da fracção irreduzivel $\frac{a'}{b'}$; pelo theorema precedente temos :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'^m}{b'^m};$$

$\frac{a'}{b'}$ sendo uma fracção irreductivel, $\frac{a'^m}{b'^m}$ tambem o será, logo

$$a = a'^m, \quad \text{e} \quad b = b'^m \text{ (n° 195).} \qquad o.q.e.n.d.$$

213. *Observação.* É claro que uma potencia de uma fracção irreduzivel não pode ser representada por numero inteiro algum, por isso que a fracção sendo irreduzivel, toda potencia d'essa fracção tambem o será.

Theoremas relativos ás operações, e potencias.

214. Os theoremas demonstrados no Livro II, relativos aos numeros inteiros, subsistem quando os numeros são fraccionarios.

Passemos á demonstração do theorema fundamental; este theorema generalisado: os outros, que não são mais do que consequencias d'este, com pouca modificação, se acharão tambem generalisados.

215. Theorema. *O producto de muitos numeros fraccionarios é sempre o mesmo qualquer que seja a ordem em que se effectue a multiplicação.*

Sabemos que um producto qualquer, por exemplo,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{i}\times\frac{m}{n}=\frac{a\times c\times e\times m}{b\times d\times i\times n};$$

ora qualquer que seja a ordem dos factores no primeiro membro, tem-se sempre por segundo membro uma fracção, cujos dous termos são sempre compostos dos mesmos factores inteiros; logo os dous termos d'essa fracção terão sempre o mesmo valor, por isso que um producto de factores inteiros é independente da ordem em que se achão; logo o valor da fracção é sempre o mesmo qualquer que seja a ordem dos factores fraccionarios.

Generalisão da theoria das fracções.

216. Até aqui uma fracção tem sido considerada como composta de dous termos, numerador e denominador: estes termos sendo numeros inteiros, e o ultimo exprimindo o numero de partes em que a unidade se acha dividida. Algumas vezes

querendo representar o quociente de dous numeros fraccionarios, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, por exemplo, escreve-se:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$$

separando-os por um risco horizontal; a esta expressão deo-se o nome de *fracção de termos fraccionarios*; $\frac{a}{b}$ representa o numerador e $\frac{c}{d}$ o denominador; aqui o denominador não exprime mais o numero de partes em que a unidade se acha dividida.

Examinemos se as regras estabelecidas para as operações sobre as fracções ordinarias convem a esta nova especie de fracções, cousa importante, pois ellas se encontrão muitas vezes no calculo. Na demonstração dos theoremas que seguem a, b, c..... representarão fracções, para mais commodidade; assim $\frac{a}{b}$ será uma fracção de termos fracccionarios.

Uma expressão da forma $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$ *pode ser representada por uma fracção de termos inteiros.*

Com effeito, uma tal expressão não sendo mais do que o quociente de duas fracções, temos:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{m}{n},$$

o. q. e. n. d.

m e n representando numeros inteiros, productos de outros numeros inteiros, $a\times c$ e $b\times c$. *o. q. e. n. d.*

217. Theorema. *Uma expressão, da forma $\frac{a}{b}$, não muda de valor, quando se multiplicão seos dous termos por um mesmo numero* m.

Escrevamos o que é possivel :

$$\frac{a}{b}=q$$

q sendo uma fracção de termos inteiros.

Multiplicando por b a igualdade acima, temos :

$$a=b\times q$$

a, b e q sendo fracções de termos inteiros é claro que :

$$a\times m=b\times q\times m$$

ou

$$a\times m=(b\times m)\times q,$$

d'onde :

$$\frac{a\times m}{b\times m}=q\ ,$$

por conseguinte,

$$\frac{a\times m}{b\times m}=\frac{a}{b} \qquad \text{o. q. e. n. d.}$$

Observação. D'este theorema conclue-se o meio de simplificar e reduzir ao mesmo denominador fracções da fórma $\frac{a}{b}$, por conseguinte o meio de fazer-se a addição, e diminuição d'essas expressões.

218. Theorema II. *O producto de duas ou mais expressões, da forma $\frac{a}{b}$, é igual ao producto dos numeradores dividido pelo producto dos denominadores.*

Trata-se de demonstrar, por exemplo, que :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

De

$$\frac{a}{b} = q, \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = q'$$

deduz-se

$$a = b \times q \quad \text{e} \quad c = d \times q';$$

multiplicando membro a membro a primeira igualdade pela segunda, temos :

$$a \times c = b \times q \times d \times q'$$

ou

$$a \times c = (b \times d) \times (q \times q');$$

donde :

$$\frac{a \times c}{b \times d} = q \times q';$$

porém,

$$q \times q' = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d};$$

logo,

$$\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}. \qquad \textit{o. q. e. n. d.}$$

219. THEOREMA III. *O quociente da divisão de duas expressões de forma $\frac{a}{b}$ é igual ao producto da primeira pela segunda, porém inversa.*

Trata-se de demonstrar que :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}, \quad \text{ou} \quad = \frac{a \times d}{b \times c}$$

com effeito, se a igualdade acima é justa ; isto é, se $\frac{a \times d}{b \times c}$ representa o quociente de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{b}$, multiplicando esse quociente pelo divisor $\frac{c}{d}$, deve-se reproduzir o dividendo ;

Com effeito :

$$\frac{a \times d}{b \times c} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times d \times c}{b \times c \times d} \text{ (n° 218)} = \frac{a}{b} \quad \textit{o. q. e. n. d.}$$

Applicação da theoria das fracções.

220. Tres questões podem-se appresentar na applicação da theoria das fracções.

I. *Conhecendo-se o valor de um inteiro, achar o valor de uma fracção d'esse inteiro.*

II. *Conhecendo-se o valor de uma fracção de um inteiro, achar o valor d'este inteiro.*

III. *Conhecendo-se o valor de uma fracção de um inteiro, determinar o valor de outra fracção d'esse inteiro.*

Resolve-se a primeira questão *multiplicando o valor do inteiro pela fracção.*

EXEMPLO. *Um covado de um certo pano custando 5 mil reis, quanto custarão $\frac{2}{5}$ de um covado?*

A solução do problema é $5 \times \frac{2}{5}$.

Resolve-se a segunda questão *dividindo o valor da fracção por essa fracção.*

Exemplo. Os $\frac{3}{4}$ de um covado de pano custão 6 mil reis, qual é o preço do covado ?

A solução do problema é $\frac{6}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{6 \times 4}{3} = 8$.

Resolve-se a terceira questão por meio das duas precedentes ; por meio da segunda procura-se o valor do inteiro, e por meio da primeira o valor da outra fracção do inteiro, que se pede.

Exemplo. O preço dos $\frac{3}{5}$ de um metro de pano sendo 9 francos, pergunta-se o preço de $\frac{2}{3}$ do metro.

O preço do metro será $\frac{q}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{9 \times 5}{3} = 15$ francos, e o preço dos $\frac{2}{3}$ será $15 \times \frac{2}{3} = \frac{15 \times 2}{3} = 10$ francos.

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *Dividir 126 em tres partes taes que a segunda seja os* $\frac{3}{4}$ *da primeira e a terceira os* $\frac{2}{3}$ *da segunda.*

Solução. A terceira sendo os $\frac{2}{3}$ da segunda é os $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ da primeira, assim :

$$\text{a primeira} + \frac{3}{4} \text{ da primeira} + \frac{1}{2} \text{ da primeira} = 126,$$

ou

$$\frac{9}{4} \text{ da primeira} = 126,$$

d'onde se deduz :

$$\text{a primeira} = \ldots\ldots\ldots 56,$$

$$\text{por conseguinte a segunda} = \frac{3}{4} \cdot 56 = 42,$$

$$\text{e} \qquad \text{a terceira} = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28$$

$$\text{Somma} = \ldots.\ 126$$

II. *Duas bicas alimentão um tanque; a primeira correndo só encheria o tanque vasio em 3 horas, e a segunda em 5. Determinar o tempo que empregarião as duas bicas correndo ao mesmo tempo para encher o dito tanque.*

Solução. Por isso que a primeira correndo só encheria o tanque em 3^h, em 1^h encheria $\frac{1}{3}$ do tanque; pela mesma razão em 1^h a segunda encheria $\frac{1}{5}$ do tanque, logo em 1^h as duas bicas correndo juntas encherião $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, ou $\frac{8}{15}$ do tanque; se $\frac{8}{15}$ do tanque se enchem em 1^h, o tanque inteiro será cheio em $\frac{15}{8}$ ou em $1^h. 52^m. 30^s$.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

III. *As duas agulhas de um relogio márcão meiodia, pergunta-se quando terá lugar o encontro seguinte.*

IV. *A metade, os dous terços e os tres septimos de um numero fazem* 67. *Determinar esse numero.*

V. *A somma de dous numeros é* 66; *o terço mais o quarto do*

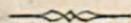
primeiro equivalem á metade mais o quinto do segundo. Determinar esses numeros.

VI. *Um relogio que avança de tres minutos por dia foi acertado ao meiodia. Pergunta-se a hora exacta no mesmo dia, marcando o relogio* $7^h. 12^m$.

VII. *Duas bicas correm no mesmo tanque: a primeira correndo só o enche em* 5^h, *a segunda em* 4^h, *e a agua do tanque corre por uma torneira que o esvasia em* 2^h. *O tanque estando cheio, e as tres torneiras correndo simultaneamente, em que tempo o tanque se esvasiará?*

VIII. *Dividir* 391 *em tres partes, de maneira que a segunda seja ao mesmo tempo os* $\frac{5}{7}$ *da primeira e os* $\frac{7}{11}$ *da terceira.*

IX. *Seis numeros estão entre si como* 16, 13, 11, 9, 5 *e* 3. *A somma do primeiro e do ultimo é* $104\frac{1}{2}$. *Quaes são esses numeros?*

X. *A metade dos* $\frac{2}{3}$ *dos* $\frac{3}{5}$ *de um numero vale* 8. *Qual é esse numero?*

CAPITULO III.

THEORIA DOS NUMEROS DECIMAES.

Definições.

221. Vimos, tratando das fracções ordinarias, que sua origem era a medida das grandezas continuas, e para ter-se o valor exacto de uma grandeza continua, quando esta não encerrava um numero exacto de vezes a unidade escolhida, dividia-se a unidade em certo numero de partes iguaes, numero que até aqui tem sido arbitrario.

A simplicidade das operações sobre os numeros inteiros provem dos principos estabelecidos na numeração, que consistem sobre tudo na lei de decrescimento, que rege as differentes unidades, cujas collecções são representadas pelos algarismos, que compôem o numero inteiro. Por conseguinte, é claro que os calculos sobre os numeros fraccionarios tornar-se-hão muito mais simples, submettendo a divisão da unidade em partes iguaes a essa mesma lei.

Dividindo-se a unidade em dez partes iguaes, cada uma d'essas partes será um *decimo* da unidade; dividindo-se um decimo da unidade em dez partes iguaes, cada uma d'estas novas partes será um decimo de um decimo da unidade, ou um *centesimo* da unidade: a decima parte de um centesimo será um *millesimo*, etc., etc.

Os *decimos*, *centesimos*, *millesimos*, da unidade chamão-se *partes decimaes da unidade.*

Assim, uma unidade vale dez decimos, um decimo dez centesimos, um centesimo dez millesimos, etc.; *em geral uma*

unidade de ordem decimal qualquer vale dez unidades da ordem seguinte.

Obtem-se o valor de uma grandeza procurando as unidades inteiras que contem; supponhamos 15, mais um resto; os decimos que contem este resto, supponhamos 3, mais um resto; os centesimos que contem este resto, supponhamos 5, mais um resto e assim successivamente até chegar-se a um resto nullo, ou tão pequeno que se possa desprezar sem alterar sensivelmente o valor da grandeza; assim diz-se que, o valor da grandeza é 15 unidades, 3 decimos e 5 centesimos. O numero 3 decimos mais 5 centesimos chama-se *fracção decimal:* e logo que a esta fracção se ajunta a parte inteira, por exemplo, 15 unidades, obtem-se um *numero decimal.*

MANEIRA DE ESCREVER-SE UM NUMERO DECIMAL.

222. A regra que se deve seguir para escrever um numero decimal não é mais do que uma extensão da que foi estabelecida na numeração escripta para os numeros inteiros. Com effeito, como as differentes unidades de ordem decimal se achão sujeitas á mesma lei de decrescimento que as differentes unidades nos numeros inteiros, e tendo em vista o principio estabelecido na numeração escripta; isto é, *que um algarismo collocado á esquerda de outro representa unidades dez vezes mais fortes, e collocado á direita representa unidades dez vezes mais fracas,* será facil ver-se que o algarismo collocado á direita do algarismo das unidades representará os decimos da unidade, o seguinte (indo para a direita) representará a collecção dos centesimos, o seguinte a dos millesimos, o seguinte a dos decimos-millesimos, o seguinte, a dos centesimos-millesimos, etc.; para se poder distinguir onde começa a fracção decimal, separa-se por meio de uma virgula o algarismo das unidades do algarismo dos decimos; assim o numero decimal composto de 217 unidades, 3 decimos, 5 centesimos, 8 millesimos é escripto 217,358.

Quando um numero decimal não contem parte inteira, escreve-se no lugar um zero que é separado por meio da virgula do algarismo dos decimos; assim o numero decimal composto de 7 decimos, 5 centesimos, 3 millesimos, 8 decimos-millesimos é escripto 0,7538.

Em um numero decimal os differentes algarismos, que compoêm a parte decimal, chamão-se *algarismos decimaes, figuras decimaes,* ou simplesmente *decimaes.*

MANEIRA DE ENUNCIAR-SE UM NUMERO DECIMAL.

223. Seja por exemplo o numero 317, 3578 que queremos ler.

I. Podemos dizer: 317 unidades, 3 decimos, 5 centesimos, 7 millesimos e 8 decimos-millesimos.

II. Podemos ler: 317 unidades e 3578 decimos-millesimos; com effeito, por isso que

1 decimo = 10 centesimos = 100 millesimos =
= 1000 decimos-millesimos,

1 centesimo = 10 millesimos = 100 decimos-millesimos,

e 1 millesimo = 10 decimos-millesimos,

temos:

3 decimos.	= 3000	decimos-millesimos,		
5 centesimos	= 500	»	»	,
7 millesimos	= 70	»	»	,
8 decimos-millesimos. . .	= 8	»	»	,

e fazendo a somma d'essas igualdades, temos:

3 decimos + 5 centesimos + 7 millesimos + 8 decimos-
millesimos = 3578 decimos-millesimos,

III. Demonstrando da mesma maneira como no caso prece-

dente ver-se-hia que ainda se pode ler o numero escripto dado : 3 milhões 173 mil 578 decimos-millesimos.

224. Principio I. *Um numero decimal não muda de valor, quando se ajunta ou supprime um ou muitos zeros a sua direita.*

Por isso que o valor relativo de cada algarismo em uma fracção decimal depende do lugar que occupa em relação á virgula, logo, etc.

225. Principio II. *Logo que em um numero decimal se avança a virgula de um, dous algarismos, etc., para a esquerda ou para a direita, o numero decimal torna-se* 10, 100 *vezes, etc., maior ou menor.*

Com effeito, avançando a virgula de um algarismo para a direita, o valor relativo de cada algarismo torna-se dez vezes maior, por isso que o algarismo, que representava os decimos, representa as unidades, o que representava os centesimos representa os decimos, etc., logo o numero decimal torna-se dez vezes maior.

Logo *para multiplicar ou dividir um numero decimal por* 10^n, *basta avançar a virgula de* n *algarismos para a direita ou para a esquerda.*

Conversão de uma fracção decimal em fracção ordinaria.

226. Pelo que se disse (nº 221), uma fracção decimal differe de uma fracção ordinaria em que a divisão da unidade em partes iguaes é submettida a uma lei, o que não existe na fracção ordinaria; logo a fracção decimal é um caso particular da fracção ordinaria, e enunciando todo e qualquer numero decimal da segunda maneira (nº 223) vê-se que:

$$317,\,3578 = 317 + \frac{3578}{10000} = 317 + \frac{3578}{10^4}\,.$$

Em geral, *um numero decimal qualquer é igual a sua parte*

inteira mais uma fracção ordinaria, que tem por numerador a parte decimal e por denominador uma potencia de 10, cujo expoente é igual ao numero dos algarismos na parte decimal.

Applicando ainda esta regra aos seguintes exemplos, temos:

$$0,312 = \frac{312}{10^3}, \quad 0,026 = \frac{26}{10^3}, \quad 0,0005 = \frac{5}{10^4}.$$

Reciprocamente. Uma fracção ordinaria cujo denominador é uma potencia de 10, é igual a uma fracção decimal, que contem tantos algarismos na parte decimal, quantas unidades ha no expoente da potencia.

Assim é claro que:

$$\frac{3476}{10^2} = 34,76, \quad \frac{467}{10^5} = 0,00467.$$

Addição. — Subtracção.

227. Como nos numeros decimaes uma unidade de ordem qualquer vale dez unidades da ordem immediata, tanto na parte inteira como na decimal, logo a regra da addição e subtracção estabelecida para os numeros inteiros convem aos numeros decimaes.

Assim é evidente que:

$$120,3125 + 0,03267 = 120,34517$$

e

$$120,3125 - 0,03267 = 120,27983.$$

Pode-se verificar esta regra por meio das fracções ordinarias; com effeito,

$$120,3125 = 120 + \frac{3125}{10000}$$

e

$$0,03267 = \frac{3267}{100000}$$

logo

$$120,3125 + 0,03267 = 120 + \frac{31250}{100000} + \frac{3267}{100000} =$$

$$= 120 + \frac{31250 + 3267}{100000}.$$

Seguindo a mesma marcha, verificar-se-hia a regra estabelecida para a subtracção dos numeros inteiros.

Regra. *Para addicionar dous ou mais numeros decimaes ou para subtrahir um numero decimal de outro, procede-se como nos numeros inteiros, collocando os algarismos uns debaixo dos outros, de maneira que as unidades de mesma ordem se correspondão ; o que se obtem, collocando os numeros de tal maneira que as virgulas se achem em uma mesma columna vertical.*

Observação. Pode acontecer que na subtracção o subtrahendo contenha mais algarismos decimaes que o minuendo ; n'este caso ajuntão-se zeros sufficientes ao minuendo, o que não lhe altera o valor, e procede-se a operação á maneira ordinaria.

Multiplicação.

228. Considerão-se dous casos :

I. *O multiplicador é numero inteiro.*

Seja 2, 37 a multiplicar por 35.

O numero 237 é 100 vezes maior que o numero dado 2, 37 (nº 225), logo o producto 237×35 será 100 vezes maior que o producto $2,37 \times 35$; logo obter-se-ha este, effectuando aquelle, que se tornará depois 100 vezes menor, separando á direita do producto dous algarismos.

Regra. *Para obter-se o producto de dous numeros n'este caso particular, multiplicão-se os dous numeros, como se fossem inteiros, e separão-se á direita do producto tantos algarismos decimaes, quantos ha no factor dado.*

II. *O multiplicando e o multiplicador são ambos numeros decimaes.*

Seja proposto multiplicar 23,45 por 2,732.

Tomando-se por multiplicador o numero 2732, que é 1000 vezes maior que o multiplicador dado, o producto de 23,45 por 2732 será 1000 vezes maior que o producto buscado; applicando-se sobre estes dous ultimos numeros a regra precedente, o producto terá dous algarismos decimaes, e avançando ainda a virgula para a esquerda de tres algarismos o producto tornase-ha mil vezes mais fraco, e representará o producto exacto dos dous numeros decimaes.

Eis o typo da operação:

```
    23,45
     2,732
  --------
     4 690
    70 35
  1641 5
  4690
  --------
  64,06540
```

Regra. *Para multiplicar dous numeros decimaes, multiplicão-se os dous numeros, como se fossem inteiros e separão-se á direita do producto tantos algarismos decimaes, quantos ha á direita dos dous factores.*

Considerando os numeros decimaes como fracções ordinarias, cujos denominadores são potencias de 10, verificar-se-hia a regra supra.

Divisão.

229. Distinguem-se dous casos na divisão dos numeros decimaes.

I. *O divisor é numero inteiro.*

Seja proposto dividir 27,325 por 28. Dividindo-se por 28 o numero 27325, que é 1000 vezes maior que o dividendo dado, o quociente será 1000 vezes maior, logo ter-se-ha o quociente buscado, separando á direita d'aquelle tres algarismos decimaes.

Eis o typo da operação:

27,325	28
2 12	0,975
165	
25	

O quociente exprimindo millesimos, o quociente completo será 975 millesimos mais $\frac{25}{28}$ de um millesimo, o que se escreve :

$$\frac{27,325}{28}=0,975+\frac{25}{28000}.$$

Regra. *Para dividir um numero decimal por um inteiro, divide-se por este o numero decimal, considerado como inteiro, e á direita do quociente separão-se por meio da virgula tantos algarismos decimaes, quantos ha no dividendo dado.*

II. *O dividendo e o divisor são numeros decimaes.*

Seja por exemplo 237,25, um numero que se quer dividir por 4,826.

Tomando-se por divisor o numero 4826, o quociente será 1000 vezes menor; logo para obter-se o quociente exacto, será necessario multiplicar por 1000 o dividendo dado, e qual torna-se 237250; assim :

$$\frac{237,25}{4,826}=\frac{237250}{4826},$$

e entra-se no caso ordinario da divisão dos numeros inteiros.

Se se tivesse de dividir 943,6257 por 6,28, repetindo-se os raciocinios precedentes, ter-se-hia :

$$\frac{943,6257}{6,28} = \frac{94362,57}{628} = 150,25 + \frac{557}{62800},$$

operação, que se pode effectuar empregando-se a regra estabelecida para o primeiro caso, que ha pouco examinámos.

Regra. *Para dividir-se dous numeros decimaes um pelo outro, torna-se inteiro o divisor, o que se faz multiplicando-se o dividendo e o divisor pela unidade seguida de tantos zeros quantos algarismos ha no divisor; o que não altera necessariamente o quociente, e procede-se a divisão d'esses dous numeros, empregando-se a regra que lhes fôr conveniente.*

Observação. Examinarão-se todos os casos que se podem appresentar n'esta operação.

O segundo caso dá lugar a uma divisão de numeros inteiros, logo que o divisor contem mais algarismos decimaes que o dividendo; no caso contrario a divisão de dous numeros decimaes entra no primeiro caso, onde o quociente completo se obtem ajuntando-se ao quociente determinado pela divisão uma fracção ordinaria, cujo numerador é o resto da operação, e cujo denominador é o divisor seguido de tantos zeros quantos algarismos decimaes ha no dividendo.

Por meio das fracções ordinarias se varificaria facilmente a regra da divisão de dous numeros decimaes.

Conversão de uma fracção ordinaria em decimal.

230. *Converter ou reduzir uma fracção ordinaria em decimaes é buscar uma fracção decimal, cujo valor seja igual ao da fracção ordinaria dada.*

Expliquemos esta definição.

Seja a fracção $\frac{3}{7}$ que se quer converter em decimaes.

Sabe-se que uma fracção representa o quociente da divisão do numerador pelo seo denominador ; dividindo-se 3 por 7 acha-se 0 por quociente, e um resto 3 ; convertendo 3 unidades em decimos, temos 30 decimos a dividir por 7, o que dá 4 decimos por quociente e um resto 2 decimos, de que é necessario tomar ainda a septima parte; convertendo 2 decimos em centesimos, temos a dividir 20 centesimos por 7, o que dá por quociente 2 centesimos e um resto 6 centesimos, de que temos ainda de tomar a septima parte ; convertendo 6 centesimos em millesimos, temos a dividir 60 millesimos por 7, o que dá 8 millesimos por quociente e um resto 4 millesimos, de que se deve tomar ainda a septima parte, e assim successivamente; parando nos millesimos, temos ;

$$\frac{3}{7} = 0{,}428 + \frac{4}{7} \text{ de um millesimo.}$$

Assim reduzir uma fracção ordinaria em decimaes é buscar o maior numero de decimos, centesimos, millesimos, etc., contidos na fracção ordinaria dada ; para chegar-se a este fim, seguir-se-ha a regra seguinte, que é uma consequencia do que se acabou de dizer.

REGRA. *Para reduzir-se uma fracção ordinaria em decimaes, divide-se o numerador da fracção pelo seo denominador, o quociente dá a parte inteira da fracção decimal, que se separa por meio da virgula ; á direita do resto escreve-se um zero, e divide-se o numero assim formado pelo divisor, o quociente é o algarismo dos decimos, que se escreve á direita da virgula ; á direita do segundo resto escreve-se um zero, e o quociente da divisão do numero assim formado é o algarismo dos centesimos, que se escreve á direita do algarismo dos decimos, e assim successivamente.*

Nesta serie de divisões pode acontecer duas cousas ; ou se chega a um quociente exacto, ou nunca as divisões se fazem exactamente. No primeiro caso a fracção decimal obtida representa justamente o valor da fracção ordinaria dada, e no

segundo pode-se prolongar a operação de tal maneira que a fracção decimal obtida, desprezando-se o ultimo resto, diffira do valor da fracção ordinaria dada em uma quantidade menor que toda quantidade dada $\left(\frac{1}{10^n}\right)$, ou como se diz ordinariamente *em menos* de $\frac{1}{10^n}$.

Outra maneira de considerar-se a conversão de uma fracção ordinaria em decimaes.
Condição para que tal conversão tenha lugar.

231. Uma fracção decimal sendo equivalente a uma fracção ordinaria, cujo denominador é uma potencia de 10, para converter-se uma fracção ordinaria em decimaes, basta converter a dita fracção em outra fracção ordinaria, que tenha por denominador uma potencia de 10; isto feito, será facil passar-se d'esta á fracção decimal buscada. (nº 226, Recip.)

Trata-se pois em primeiro lugar de resolver o seguinte problema:

Achar uma fracção ordinaria equivalente a uma fracção ordinaria, tendo por denominador 10^n.

Este problema é um caso particular do problema resolvido na theoria das fracções ordinarias (nº 200), onde se exposérão ao mesmo tempo as condições necessarias para que tal transformação tenha lugar.

Representando x o numerador da nova fracção, temos :

$$\frac{x}{10^n} = \frac{a}{b}\text{; d'onde, } x = \frac{a \times 10^n}{b}.$$

Assim para obter-se x basta multiplicar a pela unidade seguida de certo numero de zeros, ou melhor ainda escrever á direita de a um numero indefinido de zeros e dividir o nu-

mero assim formado pelo denominador b da fracção dada; *foi* justamente á esta regra que chegámos pelas considerações precedentes.

Para que a transformação se faça exactamente; isto é, para que x seja inteiro, é necessario, *que* 10^n *seja um multiplo de* b, *o que significa, que* b *não deve conter outros factores senão* 2 *e* 5, $\frac{a}{b}$ *sendo uma fracção irreduzivel.*

232. *Logo, para que uma fracção ordinaria possa ser expressa em decimaes, é necessario que o seo denominador não contenha outros factores senão* 2 *e* 5.

Esta condição é sufficiente. Com effeito, se for preenchida, multiplicando os dous termos da fracção dada por uma potencia de 2 ou 5, potencia tal, que torne o denominador uma potencia perfeita de 10, teremos uma fracção da forma $\frac{N}{10^n}$, que é um numero decimal.

Seja proposto converter em decimaes as seguintes fracções.

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{25},\ \frac{7}{40},\ \frac{11}{200},\ \frac{13}{80},\ \frac{17}{160}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}=0,5\,,$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{4}{10}=0,4\,.$$

$$\frac{3}{25}=\frac{3\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{12}{10^2}=0,12$$

$$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\times5}=\frac{7\times5^2}{2^3\times5^3}=\frac{175}{10^3}=0,175$$

$$\frac{11}{200}=\frac{11}{2^3\times5^2}=\frac{11\times5}{2^3\times5^3}=\frac{55}{10^4}=0,055$$

$$\frac{13}{80}=\frac{13}{2^4\times5}=\frac{13\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{1625}{10^4}=0,1625$$

$$\frac{17}{160}=\frac{17}{2^5\times5}=\frac{17\times5^4}{2^5\times5^5}=\frac{10625}{10^5}=0,10625$$

Converterão-se as fracções acima em decimaes, decompondo-

se os denominadores em potencias de seos factores primos, e multiplicando-se os dous termos de cada fracção por uma potencia conveniente de 2 ou 5, a fim de tornar cada denominador uma potencia perfeita de 10.

Corollario. *Uma fracção decimal equivalente a uma fracção ordinaria irreduzivel contem tantos algarismos decimaes, quantas unidades tem o expoente do factor 2 ou 5, que figura no denominador com o maior expoente.*

Com effeito, o expoente n de 10^n, em que se transforma sempre o denominador da fracção irreduzivel, provem do expoente mais alto, de que é affectado o factor 2 ou 5.

Avaliação approximada em decimaes de uma fracção inconvertivel.

233. Os calculos sobre os numeros decimaes sendo muito mais faceis que sobre os numeros fraccionarios, transformão-se estes ultimos sempre em decimaes, ainda mesmo quando não sejão convertiveis; a maior parte das vezes não se tem necessidade de valores exactos, as questões que se appresentão ordinariamente, exigindo somente resultados approximados.

Ha pois vantagem em saber-se como se deve operar, para que o valor em decimaes de uma fracção ordinaria inconvertivel dada seja obtido com uma approximação dada antes e ao mesmo tempo em conhecer-se um limite do erro que se commette, tomando-se por valor da fracção ordinaria dada o numero decimal approximado (1).

234. Avaliar uma grandeza a menos de uma unidade é buscar o maior numero de unidades contido n'essa grandeza. Se o

(1) Trataremos a primeira questão, deixando de parte a segunda de que nos occuparemos na theoria das approximações.

comprimento de uma linha, por exemplo, é comprehendido entre 5 e 6 metros, 5 é o valor da grandeza *a menos de uma unidade por defeito*, e 6 é o valor *a menos de uma unidade por excesso.*

Avaliar uma grandeza a menos de $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}$ é buscar o maior multiplo d'essas fracções contido na grandeza dada. Em geral avaliar uma grandeza a menos de $\frac{1}{n}$ é buscar o maior multiplo de $\frac{1}{n}$ contido na grandeza dada.

Appliquemos as definições precedentes ás fracções. Supponhamos que se quer ter o valor da fracção $\frac{117}{25}$ a uma unidade proximo; basta para isso extrahir os inteiros contidos na fracção; assim achamos que

$$4 < \frac{117}{25} < 5;$$

4 é o seo valor por defeito, e 5 o seo valor por excesso a menos de uma unidade.

235. Problema geral. Avaliar a fracção $\frac{a}{b}$ a menos de $\frac{1}{n}$.

Pode-se sempre achar dous multiplos de $\frac{1}{n}$, qui comprehendão a fracção $\frac{a}{b}$; se $\frac{x}{n}$ représenta o menor d'esses multiplos, tem-se :

$$\frac{x}{n} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{n};$$

ou multiplicando por n :

$$x < \frac{a \times n}{b} < (x+1);$$

$\frac{a \times n}{b}$ se acha comprehendido entre dous numeros que diffe-

rem em uma unidade, logo teremos o numero inteiro x extrahindo os inteiros contidos na fracção $\frac{a \times n}{b}$.

Applicações. Séja proposto avaliar a fracção $\frac{357}{198}$ a menos de $\frac{1}{11}$; applicando-se o que se disse precedentemente, acha-se

$$\frac{19}{11} < \frac{357}{198} < \frac{20}{11};$$

a fracção $\frac{20}{11}$ differe pouco de $\frac{357}{198}$; tomando-se a primeira por valor d'esta ultima commette-se um erro que é justamente $\frac{20}{198} - \frac{357}{11} = \frac{33}{2178} = \frac{1}{66}$, o que quer dizer que a fracção $\frac{20}{11}$ differe da fracção dada em $\frac{1}{66}$.

Seja a fracção $\frac{22}{7}$ que se quer avaliar a menos de $\frac{1}{10^3}$.

O numerador da nova fracção se obtem extrahindo-se os inteiros contidos na fracção $\frac{22 \times 1000}{7}$; operando, temos :

$$\frac{3142}{10^3} < \frac{22}{7} < \frac{3143}{10^3},$$

ou

$$3,142 < \frac{22}{7} < 3,143.$$

A avaliação approximada de uma fracção ordinaria em decimaes a menos de $\frac{1}{10^n}$ é pois um caso particular do problema géral, que ainda ha pouco resolvemos, e cuja solução fornece a seguinte regra.

236. Regra. *Para avaliar-se em decimaes a menos de* $\frac{1}{10^n}$ *uma*

fracção ordinaria, multiplica-se o numerador da fracção por 10^n, divide-se o numero assim formado pelo denominador, e separa-se no quociente n algarismos á direita.

Uma fracção ordinaria $\frac{a}{b}$ sendo dada, pode-se sempre achar duas fracções decimaes approximadas que comprehendão a fracção $\frac{a}{b}$; uma representa o valor da fracção $\frac{a}{b}$ a menos de $\frac{1}{10^n}$ por defeito, e a outra por excesso.

Fracções decimaes periodicas.

237. Chama-se *fracção decimal periodica* uma fracção decimal na qual certo numero de algarismos se reproduzem indefinidamente; o numero formado por esses algarismos constitue o *periodo;* a fracção é periodica *simples*, logo que antes do primeiro periodo se achão alguns algarismos, que não fazem parte d'elle.

A fracção decimal

$$0,272727........$$

é periodica simples; 27 é o periodo; e a fracção

$$0,346282828........$$

é periodica mixta e o periodo é 28.

238. THEOREMA I. *Toda a fracção ordinaria que não dá lugar a um quociente decimal exacto, dá lugar a uma fracção decimal periodica.*

Seja $\frac{n}{d}$ a fracção dada tal, que não dá lugar a um quociente decimal exacto; a fracção decimal, equivalente a $\frac{n}{d}$, será uma fracção decimal periodica. Com effeito, para se converter a

fracção $\frac{n}{d}$ em decimaes, escreve-se á direita de n um numero indefinido de zeros e opera-se a divisão por d; na serie das divisões parciaes o menor resto que pode apparecer é a unidade e o maior $(d-1)$; não podendo haver maior que $(d-1)$, nem menor que 1, o numero dos restos differentes que se podem appresentar é ao *maximum* $(d-1)$; logo que se tiver feito pelo menos $(d-1)$ divisões parciaes, continuando a operação as outras divisões parciaes não podendo dar lugar a um resto nullo, darão lugar necessariamente a um resto ja escripto; á direita d'este escreve-se um zero, o que forma um dividendo parcial já obtido, que dividido pelo mesmo divisor dará ao quociente um algarismo já escripto e um resto já obtido, e assim por diante; de sorte que os algarismos do quociente se repetirão periodicamente.

COROLLARIO. *Pelo raciocinio precedente vê-se que, o numero dos algarismos do periodo mais o numero dos algarismos que precedem o primeiro periodo fórmão um numero menor que o divisor.*

Busca da fracção ordinaria geratrix de uma fracção decimal periodica.

239. THEOREMA II. *A fracção ordinaria, geratrix de uma fracção decimal periodica simples, tem por numerador um periodo, e por denominador um numero formado de tantos 9, quantos algarismos ha no periodo.*

Consideremos a fracção 0,272727..... : a representando uma fracção ordinaria equivalente á fracção 0,272727..... 27, na qual se tomarão n periodos, temos :

$$a = 0{,}272727.....\ 2727; \qquad (1)$$

multiplicando esta igualdade por 100 :

$$100 \times a = 27{,}2727......\ 27. \qquad (2)$$

e subtrahindo (1) de (2), temos :

$$100.a - a = 27 - \frac{27}{100^{2.n}}$$

ou

$$99.a = 27 - \frac{27}{100^{2n}}$$

Á medida que se tomar n maior, mais o valor da fracção decimal periodica dada se approxima da exactidão ; de outro lado, quanto maior fôr n, tanto menor será a fracção $\frac{27}{100^{2n}}$, que tem por limite zero se n cresce indefinidamente; isto é, se a fracção decimal periodica dada é considerada com seo valor limite; logo

$$\text{lim}.\ 99.a = 27\ ,$$

d'onde :

$$\text{lim}.\ a = \frac{27}{99}. \quad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Assim $\frac{27}{99}$ *é o limite para o qual tende a fracção* 0,272727..... *á medida que se toma um numero de periodos cada vez maior.*

240. *Observação.* A fracção ordinaria geratrix de uma fracção decimal periodica simples é susceptivel de simplificação. O denominador, contendo somente algarismos 9, depois da simplificação, se houver, nunca conterá o factor 2.

241. THEOREMA III. *A fracção ordinaria geratrix de uma fracção decimal periodica mixta tem por numerador o numero formado dos algarismos da parte não periodica e do periodo, diminuido da parte não periodica ; e por denominador o numero formado de tantos 9 quantos algarismos ha no periodo, seguido de tantos zeros quantos algarismos ha na parte não periodica.*

Seja proposto, por exemplo, determinar a fracção ordinaria geratrix da fracção 0,435272727.....;

Ponhamos :

$$a = 0,4352727\ldots,\ 2727,$$

n sendo o numero de periodos considerado; multiplicando a igualdade acima por 10^5, e depois por 10^3, temos :

$$100000.\ a = 43527,27\ldots\ 2727,$$
$$1000.\ a = 435,27\ldots\ 2727;$$

subtrahindo a segunda da primeira, temos :

$$99000 . a = (43527 - 435) - \frac{27}{10^3 \times 10^{2n}} .$$

Repetindo o mesmo raciocinio (nº 240) ver-se-hia que $\frac{27}{10^3 \times 10^{2n}}$, tem por limite zero, logo que n cresce indefinidamente ; por conseguinte

$$\lim . 99000 . a = 43527 - 435$$
$$\text{e} \lim . a = \frac{43527 - 435}{99000} .$$

o. q. e. n. d.

242. *Observação I.* O numerador de uma fracção ordinaria geratrix de uma fracção decimal periodica mixta nunca termina em zero; se assim fosse, o ultimo algarismo do periodo seria igual ao ultimo algarismo da parte não periodica, porêm então o periodo começaria por um algarismo antes.

Observação II. O theorema precedente applica-se tambem aos numeros decimaes, considerando-os como fracções periodicas mixtas.

É facil ver-se que

$$49,252525\ldots\ldots = 49 + \frac{25}{99} = \frac{49 \times 99 + 25}{99} =$$
$$= \frac{49 \times (100 - 1) + 25}{99} = \frac{4925 - 49}{99},$$

por isso que $99 = 100 - 1$,

Do mesmo modo temos:

$$57{,}327848484\ldots\ldots = 57 + \frac{32784 - 327}{99000} =$$

$$= \frac{57 \times 99000 + 32784 - 327}{99000} =$$

$$= \frac{57 \times (100000 - 1000) + 32784 - 327}{99000} = \frac{5732784 - 57327}{99000}.$$

243. Theorema IV. *O denominador da fracção ordinaria irreduzivel, geratrix de uma fracção decimal periodica mixta, contem necessariamente um dos factores 2 ou 5, ou ambos com expoentes iguaes ou differentes; o maior expoente é sempre igual ao numero dos algarismos da parte não periodica.*

O numerador não podendo terminar em zero, não pode conter ao mesmo tempo os factores 2 e 5; só poderá conter um d'elles, ou nenhum; por conseguinte, depois da simplificação se houver, existirá sempre no denominador ao menos um dos factores tendo o mesmo expoente, que a potencia de 10, que determina o numero dos algarismos da parte não periodica.

244. Corollario I. *Logo que o denominador de uma fracção ordinaria não contem os foctores 2 e 5, porém outros, differentes d'aquelles, a fracção decimal equivalente á primeira é periodica simples.*

A fracção decimal equivalente é periodica (nº 232), e periodica simples; porque, se não o fosse, seria periodica mixta, n'este caso a fracção ordinaria geratrix d'esta ultima conteria no seo denominador o factor 2 ou 5 (nº 243), o que é contrario á hypothese.

245. Corollario II. *Logo que o denominador de uma fracção ordinaria contem um dos factores 2 ou 5, ou ambos, juntos a outros factores differentes, esta fracção dá lugar a uma fracção decimal periodica mixta, na qual o numero dos algarismos da parte não periodica é igual ao maior dos expoentes de 2 e 5, que entrão n'aquelle denominador.*

A fracção decimal é periodica (nº 232), e é periodica mixta;

senão, seria poriodica simples: neste caso a fracção geratrix d'esta ultima não conteria no seo denominador nem o factor 2, nem o factor 5 (nº 244), o que é contrario á hypothese.

246. Consideremos emfim a fracção decimal periodica seguinte

$$0,99999......;$$

empregando o theorema (nº 239), temos:

$$\text{lim. } 0,9999...... = \frac{9}{9} = 1;$$

Com effeito, vê-se facilmente que á medida que o numero de periodos cresce, as fracções decimaes successivas differem da unidade de quantidades que diminuem successivamente, e podem tornar-se menores que toda quantidade dada; logo no limite a fracção 0,999...... iguala a unidade.

EXERCICIOS.

I. Calcular a fracção $\frac{3}{11}$ approximada a 0,0001;

II. Calcular a fracção $\frac{4}{29}$ approximada a $\frac{1}{7}$.

III. Calcular a fracção $\frac{311}{225}$ approximada a $\frac{3}{19}$.

IV. *A fracção* $\frac{317}{1250}$ *é convertivel em decimaes? Qual o seo valor?*

V. *Determinar uma fracção, que tenha por denominador* 40, *equivalente ao inteiro* 7.

VI. *Determinar a fracção ordinaria geratrix da fracção decimal* 0,00374374374......

VII. *Determinar a fracção ordinaria geratrix de fracção* 472,585858......

VIII. *Buscar uma fracção que tenha por denominador* 729, *equivalente á fracção* $\frac{5}{9}$.

IX. *O valor de um numero decimal periodico não muda, quando se tomão dous ou mais periodos em vez de um.*

X. *Reduzindo-se em decimaes duas fracções irreduziveis do mesmo denominador, os periodos das duas fracções decimaes terão o mesmo numero de algarimos.*

LIVRO IV.

Medidas.

—o—

CAPITULO PRIMEIRO.

SYSTEMA METRICO.

Introducção.

247. A concepção e introducção do systema metrico ou do novo systema de pesos e medidas, no territorio francez, é um monumento scientifico erigido á gloria da França.

Este systema, notavel pela sua simplicidade, pela sua base, tomada na natureza; isto é, no globo que habitamos, e pela relação que tem com o nosso systema decimal, é o resultado do mais bello trabalho geodesico, que jamais fôra emprehendido por nação alguma, nem em seculo algum.

Em 1790 a Assemblea Constituinte, surprendida dos graves inconvenientes que resultavão da grande variedade dos antigos pesos e medidas, encarregou a Academia das Sciencias de Paris pela lei de 8 de Maio do estabellecimento de um novo systema de medidas.

Uma commissão foi nomeda pela Academia, composta de Borda, Lagrange, Laplace, Monge, e Condorcet.

Para fixar a medida de comprimento a natureza offerecia dous meios principaes: 1° *o comprimento do pendulo que batte o segundo*, 2° *o comprimento do meridiano*. A primeira medida, ainda que de uso facil, dependia de dous elementos, a *gravidade*, variavel na superficie da terra, e o *tempo*, cuja divisão é arbitraria. O segundo meio, que parece ter sido empregado na mais remota antiguidade, foi pois preferido.

MM. *Delambre* e *Mechain*, célebres astronomos françezes, encarregados pela Academia das Sciencias de Paris e munidos de instrumentos de uma exactidão até então desconhecida, emprehenderão a medida do meridiano d'aquella capital, operação que já tinha sido executada antes pelo *sabio Picard*, e verificada depois por *Cassini* e seo filho.

Foi confiada a Delambre a parte septentrional, de Dunkerque a Rodez, distancia de 380000 toezas, e a Mechain o intervallo de Rodez a Montjoni perto de Barcelona contendo 170000 toezas.

No fim de 7 annos de um trabalho, constancia e coragem incomparaveis, Delambre e Mechain entrarão em Paris tendo posto termo ás suas investigações scientificas, feitas no meio de tempestades revolucionarias. Concluírão esses astronomos de seos calculos que o quarto do meridiano, supposto ao nivel do mar, equivale a um comprimento de 5130740 toezas; a decima millionesima parte d'este comprimento, que se chamou *metro*, foi tomada por unidade de comprimento.

No dia 22 de Junho de 1799 o padrão prototypo do metro em platina, na temperatura de gelo, foi deposto nos archivos do Estado, porêm só foi no dia 13 de Septembro de 1801 que o novo systema se tornou obrigatorio.

As grandezas consideradas nas sciencias Mathematicas são os *comprimentos*, *superficies*, *volumes*, e *pesos*. A reunião das unidades d'essas diversas grandezas constitue o systema metrico, que tambem se chama *legal* por ser o unico authorisado pela lei; o systema metrico é dito *decimal* porque as divisões de cada unidade são submettidas á lei decimal.

A unidade por excellencia é o metro, todas as outras se derivão d'esta.

Medidas de comprimento.

248. A unidade principal para o comprimento é o metro. Os submultiplos e multiplos d'esta unidade:
Millimetro ou um millesimo do metro;
Centimetro ou um centesimo do metro;
Decimetro ou um decimo do metro;
Decametro ou dez metros;
Hectometro ou cem metros;
Kilometro ou mil metros;
Myriametro ou dez mil metros;
formão-se fazendo preceder a palavra *metro* dos nomes tirados do latim e do grego:

Milli, centi, deci, deca, hecto, kilo, myria, que significão:

Millesimo, centesimo, decimo, dez, cem, mil, dez mil.

A figura á margem é um decimetro, as divisões 0, 1, 2....10 são centimetros, e as menores millimetros.

As subdivisões e divisões do metro são outras tantas unidades que são empregadas segundo as circunstancias, pois deve-se tomar uma unidade em relação ao comprimento que se quer medir.

Os physicos ordinariamente tomão por unidade o millimetro.

Para as medidas itinerarias toma-se por unidade o kilometro. Na agrimensura a medida empregada é o decametro ou o hectometro.

Para medir pequenos comprimentos empregão-se regoas de 2 decimetros de comprimento (duplo decimetro), divididas em centimetros e millimetros.

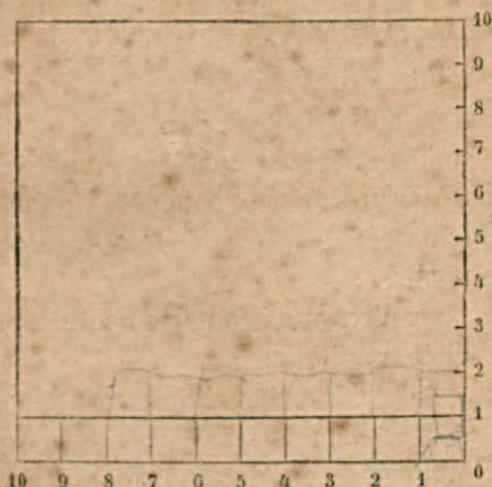
Medidas de superficie.

249. As unidades de superficie são quadrados tendo por lados as unidades de comprimento.

A unidade principal é o *metro quadrado*; isto é, quadrado cujo lado é um metro.

Os submultiplos d'esta unidade são o *millimetro quadrado*, o *centimetro quadrado*, o *decimetro quadrado*, quadrados tendo por lados respectivos o millimetro, o centimetro, e o decimetro.

Os multiplos da unidade principal são o *decametro quadrado*, o *hectometro quadrado*, o *kilometro quadrado*, o *myriametro quadrado*, quadrados tendo por lados respectivos o decametro, o hectometro, o kilometro, e o myriametro.

Cada uma d'estas unidades vale cem vezes a unidade inferior; assim por exemplo o metro quadrado vale cem decimetros quadrados. Esta propriedade dos quadrados, que se demonstra em Geometria, torna-se manifesta pela figura abaixo:

Dividindo o metro de base em dez partes iguaes, conduzindo pelo primeiro ponto de divisão da altura a partir da

base uma parallela á esta, e pelos differentes pontos de divisões da base linhas parallelas á altura até o encontro d'aquella parallela, obtem-se um rectangulo composto de 10 decimetros quadrados; ora o quadrado de um metro de lado compondo-se de 10 rectangulos iguaes á aquelle, contem 10×10 ou 100 centimetros quadrados.

Assim

Um myriametro quadrado	vale	100 kilometros quadrados.
Um kilometro quadrado	—	100 hectometros quadrados.
Um hectometro quadrado	—	100 decametros quadrados.
Um decametro quadrado	—	100 metros quadrados.
Um metro quadrado	—	100 decimetros quadrados.
Um decimetro quadrado	—	100 centimetros quadrados.
Um centimetro quadrado	—	100 millimetros quadrados.

A unidade principal para a medida dos terrenos é o decametro quadrado que se chama *are*. O multiplo e o submultiplo do are, empregados, são :

O hectare que vale 100 ares = 1 hectometro quadrado.

O centiare que vale $\frac{1}{100}$ do are = 1 metro quadrado.

As outras unidades de superficie não receberão nomes particulares.

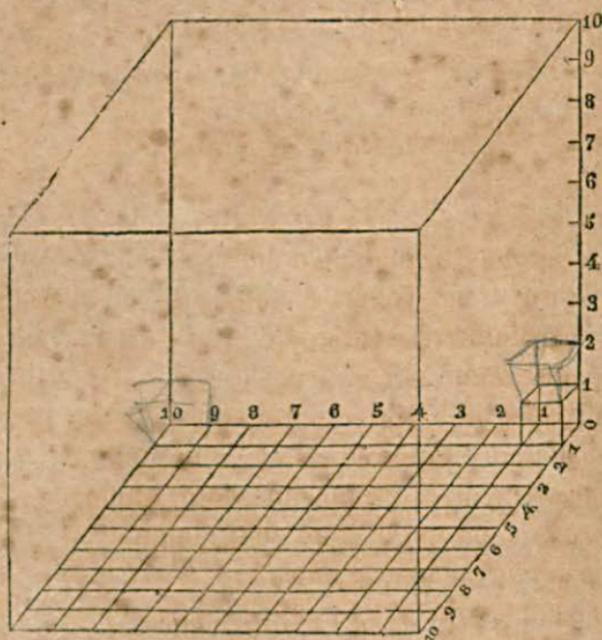
Medidas de volume ou capacidade.

250. As differentes unidades de volume são cubos tendo por lados as differentes unidades de comprimento.

A unidade principal é o *metro cubo*, cujo lado tem um metro de comprimento.

As unidades multiplas da principal não são empregadas; empregão-se porém as submultiplas, taes como o *decimetro cubo*, e o *centimetro cubo*.

Cada uma d'estas unidades vale 1000 vezes a unidade im-

mediatamente inferior, assim o metro cubo vale 1000 decimetros cubos, o que se pode ver pela figura seguinte :

O metro cubo toma o nome de *stère,* logo que é empregado para medir madeira de carpinteiria.

O multiplo do stère é o *décastère*, que vale dez stères, e o submultiplo o *decistère,* que é um decimo do stère.

MEDIDA DE LIQUIDO.

A unidade que serve na medida dos liquidos e grãos é o *litro,* cuja capacidade equivale ao decimetro cubo.

As subdivisões do litro são :

O decilitro que vale a decima parte do litro.
O centilitro que vale a centesima parte do litro.

O litro empregado na medida dos liquidos é um cylindro em estanho, cuja altura é o dobro do diametro da base. O

litro empregado na medida dos grãos é um cylindro de madeira, cuja altura é igual ao diametro da base.

Medidas de peso.

251. *O grammo* é a unidade de peso ; é o peso no vácuo de um centimetro cubo d'agua distillada na temperatura de 4 gráos do thermometro centigrado, onde a agua adquire sua densidade maximum.

As subdivisões e divisões do grammo são :

O milligrammo ou um millesimo do grammo.

O centigrammo ou um centesimo do grammo.

O decigrammo ou um decimo do grammo.

O decagrammo ou 10 grammos.

O hectogrammo ou 100 grammos.

O kilogrammo ou 1000 grammos.

O myriagrammo ou 10000 grammos.

O quintal metrico que serve para fortes pesadas vale 100 kilogrammos.

A tonelada empregada na carregação dos navios, vale 1000 kilogrammos.

Observação. Um litro d'agua distillada no maximum de densidade pesa um kilogrammo, e a tonelada de marinha é o peso de um metro cubo do mesmo liquido.

Medidas monetarias.

252. A unidade monetaria é o *franco*. O franco é uma peça de prata pesando cinco grammos, e contendo $\frac{9}{10}$ do seo peso de prata, e $\frac{1}{10}$ de cobre.

As subdivisões do franco são :

O decimo ou um decimo do franco.

O centimo ou um centesimo do franco.

As moedas de ouro contem tambem um decimo de cobre ; esta liga dá á moeda uma dureza que não teria, se fosse fabricada com prata ou ouro puro.

A razão que existe entre os valores de um mesmo peso de ouro e prata foi fixada a 15,5.

As moedas de bronze são formadas de 95 partes de cobre puro, 4 d'estanho, e uma de zinco.

TABOA DAS MOEDAS FRANCEZAS.

NOME DAS PEÇAS.		DIAMETRO em MILLIMETROS.	PESO em GRAMMOS.
OURO	Peça de 40 francos.	26	12,90322
	— 20 —	21	6,45161
	— 10 —	19	3,22580
PRATA	Peça de 5 francos.	37	25
	— 2 —	27	10
	— 1 —	23	5
	— $\frac{1}{2}$ —	18	2,5
	— $\frac{1}{5}$ —	15	1
COBRE	Peça de 10 centimos.	30	10
	— 5 —	25	5
	— 2 —	20	2
	— 1 —	15	1

Como seria muito difficil na fabricação das moedas dar a cada uma o peso legal, a lei tolera um pequeno erro para mais ou para menos ; esse erro que se chama *tolerancia*, é 0,002 do peso da peça.

Chama-se TITULO *a razão do peso da quantidade de ouro ou prata pura contida em uma liga qualquer ao peso da liga.* Assim, quando se diz que 0,750 é o titulo de umo joia d'ouro,

deve-se comprehender que sobre 1000 grammos de liga ha 750 grammos de ouro puro.

Existem tres titulos legaes para as obras de ouro que são : 0,920, 0,840, 0,750 ; os titulos legaes para as obras de prata são 0,950, e 0,800. O titulo das moedas de ouro e prata é 0,900.

As despezas de fabricação das moedas são fixadas pela lei a 6^f por um kilogrammo de ouro, e a $1^f,50$ por um kilogrammo de prata, de maneira que um kilogrammo de prata no titulo de 0,900 vale somente $200 - 1,50 = 198^f,50$, e um kilogrammo de ouro no mesmo titulo vale $200 \times 15,5 - 6 = 3094^f$, assim :

900^g de prata pura valem $198^f, 50$

e

900^g de ouro puro valem 3094^f.

logo :

1^g de prata pura vale . $\frac{198,50}{900}$

e

1^g de ouro puro vale . $\frac{3094}{900}$

e em seguida :

1000^g ou 1^{kg} de prata pura vale $\frac{198,50 \times 1000}{900} = 220^f, 56$

e

1000^g ou 1^{kg} de ouro puro vale $\frac{3094 \times 1000}{900} = 3437^f, 78$.

Divisão da Circumferencia.

253. *A circumferencia* é uma linha curva fechada, cujos pontos, situados em um mesmo plano, estão igualmente distantes de um ponto interior, chamado *centro*.

A circumferencia se divide em 400 partes iguaes chamadas

gráos, o gráo em 100 *minutos*, e o minuto em 100 *segundos*, etc.

Escreve-se por exemplo um arco de 19 gráos, 55 minutos, e 13 segundos : 19° 55′ 13″. Esta divisão não foi adoptada.

EXERCICIOS.

I. *A medida de um comprimento é* $2437^{m},437$, *exprimir essa medida successivamente em kilometros, decimetros, decametros e millimetros.*

II. *A medida de uma superficie é* $24^{hect. m. q.}$, 427945, *exprimir essa medida em decimetros quadrados, e em metros quadrados.*

III. *A medida de certa superficie é* 2463207 *centiares, exprimir essa medida em hectares.*

IV. *A medida de certo volume é* $432794^{m. c.},492070$, *exprimir esse volume em hectometros cubos, e em decimetros cubos.*

V. *A medida de certo liquido é* $6397,^{lit.}427$, *exprimir essa medida em hectolitros, e em decilitros.*

VI. *Um sacco contendo francos pesa* 1155 *kilogrammos, pergunta-se o numero de francos.*

VII. *Um sacco contem* 150 *peças de* 5 *francos, qual o peso do sacco?*

VIII. *Em virtude da definição do litro, determinar o peso de um litro d'agua.*

IX. *Sabendo-se que* 20 *francos em prata pesão* 100 *grammos; pergunta-se o peso de* 20 *francos em ouro.*

X. *Um objecto de prata de titulo* 0,950 *pesa um kilogrammo; qual é o seo valor intrinseco?*

CAPITULO II.

SYSTEMA BRASILEIRO DE PESOS E MEDIDAS — NUMEROS COMPLEXOS. — COMPARAÇÃO ENTRE OS SYSTEMAS FRANCEZ E BRASILEIRO.

Systema brasileiro.

254. Damos aqui as principaes unidades de medidas empregadas no Brasil (1).

Medidas de comprimento.

A unidade de comprimento é a vara. Eis os multiplos e submultiplos d'esta unidade :

1 braça	vale	2 varas.
1 vara	—	5 palmos.
1 palmo	—	8 pollegadas.
1 pollegada	—	12 linhas.
1 pé	—	12 pl

As medidas itinerarias são :

A legoa que vale 3 milhas.
A milha que vale $947\frac{1}{3}$ braças.

(1) As medidas do Brasil com seos valores correspondentes no systema metrico nos forão fornecidas por M. Silberman, *conservador no Conservatorio das Artes e Officios.*

Medidas de superficie.

255. As differentes unidades de superficie são quadrados, cujos lados são as unidades correspondentes de comprimento.

Para medir terrenos emprega-se ordinariamente *a braça quadrada*, e algumas vezes a *geira* que consta de 400 braças quadradas.

Medidas de volume ou capacidade.

256. Para os liquidos são :

O tonel	que vale	2 pipas.
A pipa	—	26 almudes.
O almude	—	12 canadas.
A canada	—	4 quartilhos.

Para os seccos são :

O moio	que vale	15 fangas.
A fanga	—	4 alqueires.
O alqueire	—	4 quartas.
A quarta	—	2 oitavos.

Tambem se usa do *palmo cubico*.

Medidas de peso.

257. A unidade principal é a libra; os multiplos e submultiplos d'esta unidade são :

A arroba que vale 32 libras.

A libra	—	2 marcos.
O marco	—	8 onças.
A onça	—	8 oitavas.
A oitava	—	72 gráos.

Para as grandes pesadas empregão-se tambem o *quintal*-que vale 4 arrobas, e a *tonellada* 54.

Medidas monetarias.

258. A unidade principal é o *real*, moeda imaginaria.

As moedas de ouro e prata no Brasil tambem teem certa liga de um metal inferior; a pureza do ouro avalia-se por *quilates, grãos* e *oitavas*, e a fineza da prata por *dinheiros, grãos* e *quartas*.

Quilate é o peso de ouro puro equivalente ao peso da vigesima quarta parte de uma barra qualquer. Se, dividindo uma barra em 24 partes iguaes, 21 d'essas partes são de ouro sem liga e as outras 3 de um metal inferior, diz-se que o ouro d'aquella barra é de 21 quilates; o de 24 quilates é o ouro sem liga alguma. O quilate divide-se em 4 grãos, e o grão em 8 oitavas.

Dinheiro é o peso de prata pura equivalente ao peso da duodecima parte de uma barra qualquer. O dinheiro divide-se em 24 grãos, e o grão em 4 quartas; a prata de 12 dinheiros não contem liga alguma, e a de 11 contem 11 partes de prata pura e 1 parte de metal inferior, etc.

O ouro amoedado é de 22 quilates, e a prata de 11 dinheiros; a razão legal do ouro á prata amoedada foi fixada no Brasil a $15\frac{5}{8}$. O ouro das joias ou objectos de ouro deve ser de 20 1/2 quilates, e a prata de 10 dinheiros e 6 grãos.

TABOA DAS MOEDAS

TENDO CURSO FREQUENTE NO BRASIL.

	NOME DAS PEÇAS.	PESOS.	VALOR LEGAL no BRASIL.
OURO	Peça de 6 400 reis.	4 oitavas	10 000 reis
	— 4 000 —	2 oit 18 grãos	5 625
	— 2 000 —	em proporç.	em proporção.
	— 1 000 —	— —	—
PRATA	Peça de 3 patacas — (960 réis).	7 1/2 oitavas	1 200 reis.
	— 640 —	em proporç.	800 —
	— 320 —	— —	400 —
	— 160 —	— —	200 —
	— 80 —	— —	100 —

Divisão da circumferencia.

259. A circumferencia divide-se em 360 partes iguaes chamadas *gráos*, o gráo em 60 *minutos*, o minuto em 60 *segundos*. Escreve-se um arco qualquer como no systema metrico.
Esta divisão da circumferencia prevaleceo.

Medida do tempo.

260. A unidade de tempo é o *dia;* o dia é o tempo que emprega a terra para executar uma revolução completa em torno do seo eixo.
O dia divide-se em 24 *horas*, a hora em 60 *minutos*, o

minuto em 60 *segundos*, etc.; escreve-se 8 horas 25 minutos e 14 segundos: $8^h\ 25^m\ 14^s$.

O tempo empregado pela terra para executar sua revolução completa em torno do sol chama-se *anno*, que consta de 365 1/4 dias. O *anno civil* consta de 365 dias; todos os quatro annos ha um de 366 dias, que se chamou *bissexto*, afim de compensar a perda de $\frac{1}{4}$ de dia em cada anno.

O anno se compõe de 12 mezes: *Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agosto, Septembro, Outubro, Novembro, Dezembro.*

Teem 30 dias, Abril, Junho, Septembro e Novembro; Fevereiro 28 nos annos ordinarios, 29 nos bissextos; e os outros 31.

Numeros complexos.

261. Os numeros concretos que encerrão differentes especies de unidades, dependentes umas das outras segundo uma lei determinada chamão-se *numeros complexos*; assim $8^{liv.}\ 3^{onc.}\ 7^{oit.}$, e $1^{var.}\ 3^{pal.}\ 7^{pol.}$ são numeros complexos.

ADDIÇÃO.

262. Seja proposto por exemplo determinar a somma dos seguintes arcos: $27°\ 58'\ 13'' + \frac{2}{3}$, $12°\ 13'\ 48'' + \frac{4}{5}$, $49°\ 20'' + \frac{1}{4}$

27°	58′	13″ + $\frac{2}{3}$
12°	13′	48″ + $\frac{4}{5}$
49°	0	20″ + $\frac{1}{4}$
89°	12′	22″ $\frac{43}{60}$

Dispostos os numeros como acima se vê, addicionão-se as

fracções $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{4}$, o que dá $1 + \frac{43}{60}$; escreve-se $\frac{43}{60}$, e retem-se 1 que deve ser ajuntado á somma da seguinte columna; $1 + 13 + 48 + 20$ segundos fazem 82 segundos, que se compôem de 60″, ou 1′, mais 22″, que se escreve debaixo da columna dos segundos, guardando-se 1′ de reserva; $1 + 58 + 13$ minutos fazem 72 minutos ou 1 grão mais 12 minutos, que se escreve sob a columna dos minutos, ajuntando-se a unidade de reserva á seguinte columna, cuja somma, 89° grãos, é escripta debaixo d'ella. Assim $89° \, 12' \, 22'' + \frac{43}{60}$ é a somma dos numeros dados.

SUBSTRACÇÃO.

263. Seja proposto por exemplo determinar a differença dos dous arcos: 48° 12′ 14″, 4, e 13° 21′ 49″, 8.

48°	12′	14″, 4
13°	21′	49″, 8
34	50	24, 6

Dispôem-se os numeros como na addição, e subtrahem-se as unidades do subtrahendo das correspondentes no minuendo, empregando-se o mesmo raciocinio como na subtracção dos numeros inteiros. Assim não se podendo subtrahir 8 de 4, subtrahe-se 8 de 14, o que dá 6, que se escreve no resultado, porém tendo-se augmentado o minuendo de 10 decimos ou uma unidade deve-se fazer a mesma alteração no subtrahendo; temos pois que subtrahir 50″ de 14″, o que é impossivel, porém ajuntando 60″ a 14″, e diminuindo 50″ de 74″, temos a differença 24″, que se escreve sob a columna dos segundos; augmentando por compensação o subtrahendo de 60″ ou 1′, temos que subtrahir 22′ de 12′, o que é impossivel, porém operando como precedentemente achamos 50′, e 34°, que se escreve em seos lugares competentes; a differença buscada é pois 34° 50′ 24″, 6.

MULTIPLICAÇÃO.

264. Esta operação entre os numeros complexos tem por fim compôr o producto com o multiplicando como o multiplicador é composto com a unidade de sua especie, de modo que multiplicar por um numero complexo é multiplicar pela razão d'esse numero a unidade principal de sua especie.

PRIMEIRO CASO. *Multiplicar um numero complexo por um numero incomplexo.*

Seja proposto multiplicar $5^h\ 31^m\ 17^s$ por 5.

$$\begin{array}{rrr} 4^h & 31^m & 17^s \\ & & 5 \\ \hline 22^h & 36^m & 25^s \end{array}$$

Dispostos os numeros como na multiplicação dos numeros inteiros, opera-se começando pelas unidades mais baixas do multiplicando; $17^s \times 5$ dá 85^s, que se compôem de 60^s mais 25^s, que se escreve no resultado, guardando 1^m de reserva para ajuntar-se ao producto parcial seguinte; continuando: $31^m \times 5 + 1^m$ fazem 156^m, que equivalem a 2^h mais 36^m, que se escreve no producto total, guardando 2^h de reserva para ajuntar-se ao producto parcial seguinte; $4^h \times 5 + 2^h$ fazem 22^h, que se escreve no resultado; o producto buscado é pois $22^h\ 36^m\ 25^s$.

Este proceder ainda que natural seria muito longo, se o multiplicador fosse um numero muito grande; vamos indicar outro, conhecido sob o nome de *multiplicação por partes aliquotas*, que permitte chegar ao resultado de um modo muito mais simples: *decompôem-se as colleções das unidades que encerra o multiplicando em partes aliquotas da unidade immediatamente superior, isto é, em partes que sejão divisores exactos d'aquella unidade.*

Seja proposto como exemplo multiplicar 11 almudes 10 canadas 3 quartilhos por 225.

	$11^{alm.}$	$10^{can.}_{=6+3+1}$	$3^{quart.}_{=2+1}$
	225		
	$2475^{alm.}$		
Producto de $6^{can.}$ por 225..	112 . .	$6^{can.}$	
— $3^{can.}$ —	56 . .	3	
— $1^{can.}$ —	18 . .	9	
— $2^{quart.}$ —	9 . .	4	$2^{quart.}$
— $1^{quart.}$ —	4 . .	8	1
	$2676^{alm.}$	6^{can}	$3^{quart.}$

O producto de 11 alm. por 225 é 2475 alm. Decompondo 10 canadas em (6 + 3 + 1) canadas, que são partes aliquotas do almude, temos que multiplicar successivamente 6 can., 3 can., 1 can. por 225, em lugar de multiplicar 10 can. por 225. Ora 6 can. sendo a metade de 1 alm. é claro que o producto de 6 can. por 225 é o mesmo que a metade do producto de 1 alm. por 225 ou a metade de 225 alm., que vem a ser 112 alm. e 6 can. Tomando a metade d'este ultimo numero; isto é, 56 alm. 3 can., teremos o producto de 3 can. por 225, por isso que 3 é a metade de 6. O producto de 1 can. por 225 é o terço do producto precedente; o terço de 56 alm. é 18 alm., restão 2 alm., que valem 24 can., mais 3 can., 27 can., cujo terço é 9 can.; assim o producto de 1 can. por 225 é 18 alm. 9 can. Decompondo 3 quartilhos em (2 + 1) quartilhos, partes aliquotas da canada, temos que multiplicar successivamente 2 quart., 1 quart. por 225; 2 quart. sendo a metade de uma canada, é claro que teremos o producto de 2 quart. por 225, tomando a metade do producto precedente; a metade 18 alm. é 9 alm., a metade de 9 can. é 4 can., resta 1 can., que vale 4 quart., cuja metade é 2 quart.; assim o producto de 2 quart. por 225 é 9 alm. 4 can. 2 quart. Tomando a metade d'este ultimo numero obtem-se o producto de 1 quart. por 225; a me-

tade de 9 alm. é 4 alm., resta 1 alm., que vale 12 can., mais 4 can., 16 can. cuja metade é 8 can., em fim a metade de 2 quart. é 1 quart. Addicionando acha-se que o producto pedido é 2676 alm. 6 can. 3 quart.

SEGUNDO CASO. *Multiplicar um numero complexo por outro complexo.*

Seja proposto o seguinte problema : 1^{t} de *obra tendo custado* $11^{lib.}$ $13^{s.}$ $11^{d.}$ *qual é o preço de* $225^{t.}$ $5^{p.}$ $8^{l.} + \frac{3}{5}$ (1).

A questão tem por fim multiplicar $12^{lib.}$ $13^{s.}$ $11^{d.}$ pela razão do multiplicador á toeza, ou pelas razões respectivas de 225^{t}, 5^{p}, 8^{l} e $\frac{3}{5}$ d' uma linha á toeza : vamos pois effectuar essas quatro multiplicações.

$$11^{lib.} \ldots 15^{s.}_{=10+2+1}\ 11^{d.}_{=6+3+2}$$

$$225^{t} \ldots\ldots 5^{p}_{=3+2} \ldots 8^{l}_{+\frac{5}{6}=(6^{l}+2^{l})+\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)}$$

		lib.	s.	d.	
Prod.to por	225^{t}	$2632^{lib.}$	$1^{s.}$	$6^{d.}$	
—	3^{p}	5	16	$11 + \frac{1}{2}$	$\frac{2592}{5184}$
—	2^{p}	3	17	$13 + \frac{2}{3}$	$\frac{3456}{5184}$
—	6	0	1	$7 + \frac{77}{144}$	$\frac{2772}{5184}$
—	2^{l}	0	0	$6 + \frac{221}{432}$	$\frac{2641}{5184}$
—	$\frac{3}{6}$	0	0	$1 + \frac{1085}{1728}$	$\frac{3255}{5184}$
—	$\frac{2}{6}$	0	0	$0 + \frac{2813}{2592}$	$\frac{5626}{5184}$
		$2641^{lib.}$	$18^{s.}$	$8^{d} + \frac{4790}{5184}$	$\frac{5626}{5184}$

(1) No antigo systema francez a unidade de comprimento era a *toeza* que valia 6 *pés*, o pé 12 *pollegadas*, a pollegada 12 *linhas*, a linha 12 *pontos*. A unidade monetaria era a *libra*, que valia 20 *soldos*, o soldo 12 *dinheiros*.

O producto do multiplicando pela razão de $225^{\prime}$ á toeza obtem-se como no primeiro caso.

Decompondo-se 5^{p} em $(3+2)$ pés, partes aliquotas da toeza e sabendo-se que o multiplicando é o preço d' uma toeza de obra, o preço de 3 pés ou meia toeza será a metade do multiplicando; isto é, $5^{lib.}\ 16^{s.}\ 11^{d.} + \frac{1}{2}$; 2^{p} sendo o terço de 1^{t}, o preço de 2^{p} será o terço do preço de 1^{t}, ou o terço do multiplicando, que vem a ser $3^{lib.}\ 17^{s.}\ 13^{d.} + \frac{2}{3}$. Decompondo 8^{l} em partes aliquotas da pollegada; isto é, em $(6+2)$ linhas, teremos o preço de 6^{l}, procurando antes o preço de 1 pollegada, que é $\frac{1}{24}$ do preço de 2 pés, e que se acha facilmente ser $0^{lib.}\ 3^{s.}\ 3^{d.} + \frac{5}{72}$. Ora 6 linhas sendo igual a meia pollegada, obtem-se o preço de 6 linhas, tomando a metade do preço de uma pollegada, que vem a ser $0^{lir.}\ 1^{s.}\ 7^{d.} + \frac{77}{144}$. Tomando o terço d'este ultimo numero; isto é, $0^{lir.}\ 0^{s.}\ 6^{d.} + \frac{221}{432}$, obtem-se o preço de duas linhas; teremos o preço de $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ da pollegada, tomando a quarta parte do preço de 2 pollegadas, que se acha facilmente ser $0^{lib.}\ 0^{s.}\ 1^{d.}\ \frac{1085}{1728}$; tomando $\frac{1}{3}$ d'este numero obtem-se o valor de $\frac{1}{6}$, e em seguida o valor de $\frac{2}{6}$ multiplicando o precedente por 2. Addicionando tudo, começando pelas fracções, obtem-se o producto pedido : $2641^{lib.}\ 18^{s.}\ 8^{d.}\ \frac{4790}{5184}$.

DIVISÃO.

265. Distinguimos tres casos na divisão dos numeros complexos.

PRIMEIRO CASO. *O dividendo é numero complexo, e o divisor incomplexo.*

Seja proposto o seguinte problema : 13^{t} de obra custárão $140^{lib.}\ 16^{s.}\ 11^{d.}$, qual é o preço de uma toeza ?

O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente é da especie de um d'elles, ora o dividendo exprimindo libras e o divisor toezas, o quociente pelo enunciado do problema deve

exprimir libras; por conseguinte, a questão tem por fim dividir $140^{lib.}\ 16^{s.}\ 11^{d.}$ pelo numero 13, considerado como abstracto.

$$
\begin{array}{l|l}
140^{lib.}\ \ 16^{s.}\ \ 11^{d.} & 13 \\
\cline{2-2}
130 & 10^{lib.}\ \ 16^{s.}\ \ 8^{d.} + \frac{3}{13} \\
\hline
10 & \\
20 & \\
\hline
200^{s.} & \\
16 & \\
\hline
216^{s.} & \\
208 & \\
\hline
8 & \\
12 & \\
\hline
96^{d.} & \\
11 & \\
\hline
107^{d.} & \\
104 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

Dispondo o dividendo e o divisor como na divisão dos numeros inteiros divide-se $140^{lib.}$ por 13, o quociente é $10^{lib.}$, e ha um resto $10^{lib.}$ que se deve ainda dividir por 13; converte-se $10^{lib.}$ em soldos, multiplicando 10 por 20, o que faz 200^{s}, mais 16 soldos do dividendo, 216^{s}; o quociente de 216 por 13 é 16^{s}, e o resto da divisão é 8^{s} que se converte em dinheiros multiplicando 8 por 12, o que faz 96^{s}, mais 11 soldos do dividendo, $107^{s.}$; divide-se em fim $107^{s.}$ por 13, e acha-se por quociente $8^{d.} + \frac{3}{13}$; $10^{lib.}\ 16^{s}\ 8^{d.}\ \frac{3}{13}$ que é o quociente pedido.

SEGUNDO CASO. *O dividendo e o divisor são numeros complexos de especie differente.*

Seja proposto dividir $27^{lib.}\ 15^{s.}\ 11^{d.}$ por $4^{t.}\ 3^{p.}\ 11^{po.}$. Ve-se facilmente que o quociente deve exprimir libras; trata-se pois de dividir o dividendo pela razão do divisor á toesa. Ora $4^{t}\ 3^{p}\ 11^{pol} = 335^{pol}$, e por isso que a toesa contem, 72^{pol}, a razão do divisor á toesa é $\frac{335}{72}$. O quociente pedido é pois $\frac{27^{lib.}\ 15^{s.}\ 11^{d.} \times 72}{335}$, operação que sabemos effectuar.

TERCEIRO CASO. *O dividendo e o divisor são numeros complexos de mesma natureza.*

N'este caso a especie das unidades do quociente é determinada pelo enunciado da questão, assim como vamos ver no seguinte problema :

Uma toeza de obra custa $2^{lib.}\ 11^{s.}$, *quantas toezas de obra se terá por* $54^{lib.}\ 13^{s.}\ 10^{d.}$?

N'esta questão o quociente buscado exprime toezas. O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente ; isto é, pela razão do quociente á toeza, teremos essa razão tomando a de $54^{lib.}\ 13^{s.}\ 10^{d.}$ á $2^{lib.}\ 11^{s.}$; ora $54^{lib.}\ 13^{s.}\ 10^{d.} = 13126^{d.}$, e $2^{lib.}\ 11^{s.} = 612^{d.}$, logo a razão pedida é $\frac{13126}{612}$, e em seguida o quociente buscado é o quociente da divisão de 13126^{t} por 612, o que se sabe fazer (nº 265 — 1º caso).

Todas as questões sobre os numeros complexos podem ser resolvidas facilmente pelo calculo das fracções ordinarias, reduzindo as subdivisões da unidade principal de cada numero complexo em fracções d'aquella unidade. Querendo por exemplo dividir $27^{lib.}\ 15^{s.}\ 11^{d.}$ por $4^{t}\ 3^{p}\ 11^{pol}$, converte-se $15^{s.}\ 11^{d.}$ em uma fracção ordinaria da unidade principal que é a libra, e $3^{p}\ 11^{pol}$ em outra da toeza, de maneira que o quociente pedido é o mesmo que o de $27^{lib.}\ \frac{191}{240}$ por $4^{t}\ \frac{47}{72}$.

Comparaçao entre os systemas Francez e Brasileiro.

Medidas de comprimento.		Medidas de superficie.	
1 braça.	2ᵐ,20	1 braça quadrada . .	4ᵐ,984
1 vara	1 ,10	1 palmo quadrado . .	0 ,90484
1 pé.	0 ,33		
1 pollegada	0 ,0275	**Medidas de volume.**	
1 palmo.	0 ,22	1 palmo cubico. . . .	0ᵐᶜ,011
1 covado	0 ,66	1 pipa.	4ʰ ,79ˡ
		1 canada.	0ʰ ,02
Medidas itinerarias.		1 quartilho	0ʰ ,0066
1 milha	1851ᵐ,85	1 moio.	21ʰ ,76
1 legua.	5555ᵐ,55	1 alqueire.	36ʰ ,26

MOEDAS.

	NOMES DAS PEÇAS.	TOQUE.	PESO.	OURO PURO.	VALOR.
OURO	Peça de 6,400 reis	0,917	14ᵍ,3437	13ᵍ,1484	45ᶠ,2891
	— 4,000 —	0,917	8 ,0684	7 ,3960	25 ,4750
PRATA	— 960 —	0,917	26 ,8945	24 ,6533	5 ,4785
	— 640 —	0,917	17 ,9297	16 ,4355	3 ,6525

EXERCICIOS.

I. *Borda achou que o comprimento do pendulo que bate o segundo no Observatorio de Paris é de* 440ˡ, 5593. *Determinar esse comprimento em metros.*

II. *Sabendo-se que* 81 *libras valem* 80 *francos, determinar em francos, decimos e centimos o valor de* 4137ˡⁱᵇ· 17ˢ· 11ᵈ·

III. *Em um certo circulo, o comprimento do arco de* 97° 21′ 47″ 2

vale 23 metros. Qual é em gráos, minutos e segundos o comprimento do metro?

IV. *O comprimento de 1° tomado em um certo circulo é igual a* 824^{m}, 21 ; *qual é o comprimento do arco de* 47° 28′ 33″ ?

V. *A distancia do pólo boreal ao equador vale* 10,000,000 *de metros; tambem vale* 90 *gráos. Qual o comprimento de um gráo?*

VI. *Chama-se legua de* 25 *ao gráo, a* 25 ª *parte de um gráo. Quantos metros contem a legua de* 25 *ao gráo?*

VII. *Avaliar em gráos, minutos, e segundos os* $\frac{3}{7}$ *de* 90 °.

VIII. *Pergunta-se o que é o arco* 42° 27′ 32″ *em relação á circumferencia.*

IX. *Converter* 98^{g}, 2572 *(systema metrico) em gráos, minutos e segundos.*

X. *Converter* 58° 27′ 13″ *em gráos (systema metrico).*

LIVRO V.

Potencias e Raizes.

—∾—

CAPITULO PRIMEIRO.

QUADRADO. — RAIZ QUADRADA.

Quadrado.

266. *Quadrado ou segunda potencia de um numero* é o producto d'esse numero por si mesmo; assim 5×5 ou 25 é o quadrado de 5 e se indica 5^2.

O quadrado da fracção $\frac{3}{5}$ é $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{3^2}{5^2}$; assim da seguinte igualdade

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$$

concluimos que *para elevar uma fracção ao quadrado é necessario elevar ao quadrado cada um dos seos termos, e se a fracção é irreduzivel o quadrado será tambem uma fracção irreduzivel.*

Os quadrados dos numeros :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
são	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 .

Os numeros da segunda linha são ditos *quadrados perfeitos.*

267. THEOREMA I. *Quando um numero não é quadrado perfeito, não existe numero algum, que elevado ao quadrado reproduza o numero proposto.*

Se N não é quadrado perfeito de outro numero inteiro, supponhamos que o seja do numero fraccionario $\frac{a}{b}$, então teriamos :

$$N = \frac{a^2}{b^2};$$

porém $\frac{a}{b}$ sendo uma fracção irreduzivel, $\frac{a^2}{b^2}$ é tambem irreduzivel, logo ter-se-hia um numero inteiro N igual a uma fracção irreduzivel, o que é absurdo.

268. THEOREMA II. *Se os dous termos de uma fracção irreduzivel não são quadrados perfeitos, não existe numero algum, cujo quadrado seja igual á fracção proposta.*

Se os dous termos a e b da fracção irreduzivel $\frac{a}{b}$ não são quadrados perfeitos, $\frac{a}{b}$ não pode ser igual ao quadrado de $\frac{m}{n}$, fracção tambem irreduzivel, porque então teriamos :

$$\frac{a}{b} = \frac{m^2}{n^2}$$

e em seguida,

$$a = m^2, \ b = n^2.$$

Logo, para que uma fracção irreduzivel possa ser quadrado de

outra, é necessario que os dous termos sejão quadrados perfeitos; é evidente que a condicção é sufficiente.

269. THEOREMA III. *O quadrado da somma de dous numeros é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o quadrado do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.*

Representando $(a+b)$ a somma de dous numeros a e b, o quadrado da somma será :

$$(a+b)^2=(a+b)\times(a+b);$$

effectuando a multiplicação no segundo membro (nº 79) temos :

$$(a+b)^2=a\times a+a\times b+a\times b+b\times b.$$

ou $(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2.$ *o. q. e. n. d.*

Observação I. Todo numero podendo ser decomposto em dezenas e unidades, o quadrado de um numero se compõe: *do quadrado das dezenas, mais duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.*

Assim $3646=(3640+6)$ e por conseguinte :

$$(3646)^2=(3640+6)^2=(3640)^2+2\times3640\times6+6^2.$$

Observação II. A differença dos quadrados de dous numeros consecutivos é igual ao dobro do menor mais um.

Com effeito, a e $(a+1)$ sendo dous numeros consecutivos temos :

$$(a+1)^2-a^2=a^2+2\times a+1-a^2=2\times a+1.$$ *o. q. e. n. d.*

270. THEOREMA IV. *O quadrado de um numero inteiro nunca termina nos algarismos 2, 3, 7 e 8.*

Com effeito, o quadrado é um producto de dous factores iguaes, e as unidades do producto provém do producto das unidades dos dous numeros; ora nenhum dos quadrados dos nove primeiros numeros terminão n'esses algarismos; logo, etc.

271. Theorema v. *O quadrado de um numero inteiro não pode terminar em um numero impar de zeros.*

Para que o quadrado de um numero termine em zeros, é necessario que esse numero termine em zeros; representando-o pois por $a \times 10^n$, temos :

$$(a \times 10^n)^2 = a \times 10^n \times a \times 10^n = a^2 \times 10^{2n}; \text{ (n° 89)}$$

$2n$ sendo um numero par, o numero de zeros é par. *o. q. e. n. d.*

272. Theorema vi. *Todo numero, que, decomposto em seos factores primos, contem esses factores com expoentes pares, é quadrado perfeito.*

Esta condição é necessaria; porque um numero sendo decomposto em seos factores primos, eleva-se esse numero ao quadrado multiplicando por 2 os expoentes d'esses factores, que se tornão por conseguinte pares.

Esta condição é sufficiente ; porque se fôr preenchida, dividindo por 2 os expoentes dos factores primos de um numero, obtem-se outro numero, que elevado ao quadrado reproduz o primeiro.

273. Theorema vii. *Um numero que é divisivel por outro primo, não pode ser quadrado perfeito, se não admittir por divisor o quadrado d'esse numero.*

Este theorema é uma consequencia do precedente : ora se d é divisor primo de um numero, quadrado perfeito, é claro que deve admittir d^2 por divisor, por isso que os expoentes dos factores primos d' um quadrado são pares. (n° 272).

Observação. Um numero que acaba em 5, não pode ser quadrado perfeito, se o algarismo immediato não fôr 2.

Raiz quadrada.

DEFINIÇÕES.

274. *Raiz quadrada de um numero é outro numero que multiplicado por si mesmo reproduz o primeiro.*

A raiz quadrada de N exprime-se pelo symbolo $\sqrt{N}$; em consequencia da definição, temos :

$$\sqrt{N} \times \sqrt{N} = N$$

Esta definição só convem á raiz quadrada de um numero que é quadrado perfeito.

A operação arithmetica, que tem por fim determinar a raiz quadrada de um numero, chama-se *extracção da raiz quadrada.*

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA DE UM NUMERO QUALQUER APPROXIMADA A MENOS DE UMA UNIDADE.

275. A raiz quadrada de um numero approximada a menos de uma unidade, é a raiz do maior quadrado inteiro contido n'esse numero.

276. THEOREMA. *A raiz quadrada, a menos de uma unidade, d'um numero que não é inteiro é a mesma que a da parte inteira.*

Seja N um numero, que é comprehendido entre dous numeros inteiros consecutivos a, e $a+1$. Pela definição (nº 275), a raiz quadrada de N a menos de uma unidade é a raiz do maior quadrado inteiro contido em N : ora os numeros inteiros contidos em N são a, e os outros menores que a, logo a raiz quadrada de N é a mesma que a de a.

Observação. A raiz quadrada de 100 sendo 10, a raiz quadrada de todo numero menor que 100 é menor que 10; de modo que pela taboa dos quadrados dos nove primeiros numeros pode-se obter facilmente a raiz quadrada de todo numero menor que 100 : assim por exemplo a raiz quadrada de 81 é 9, e a de 29 é 5 approximada a menos de uma unidade.

277. PROBLEMA GERAL. *Extrahir a raiz quadrada de um numero qualquer.*

Seja proposto determinar a raiz quadrada do numero 23796583 por exemplo.

O numero proposto é maior que 100, logo sua raiz quadrada é maior que 10; o quadrado d'essa raiz se compõe de tres partes : *do quadrado das dezenas, do dobro do producto das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.* Essas tres partes estão encerradas no numero 23796583; tratemos de separal-as.

Notemos em primeiro lugar que o quadrado das dezenas sendo um numero exacto de centenas não pode ser contido senão nos 237965 centenas do numero dado, que podem encerrar, alem d'esse quadrado, a reserva de centenas refluindo do duplo producto das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.

THEOREMA. *Para determinar as dezenas da raiz quadrada de um numero, basta extrahir a raiz quadrada do maior quadrado inteiro contido nas centenas do numero, consideradas como unidades simples.*

Com effeito, a representando a raiz quadrada do maior quadrado contido em 237965, este numero será comprehendido entre a^2, e $(a+1)^2$:

$$a^2 < 237965 < (a+1)^2 ;$$

multiplicando estas tres quantidades por 100, as mesmas relações de grandeza existirão entre os productos; isto é :

$$a^2 \times 100 < 23796500 < (a+1)^2 \times 100.$$

Os dous termos extremos exprimindo um numero exacto de centenas differem pelo menos em uma centena; por conseguinte ajuntando ao termo medio um numero menor que 100, como 83 unidades do numero dado, a somma 23796583 se achará ainda comprehendida entre os mesmos termos extremos, assim :

$$a^2 \times 100 < 23796583 < (a+1)^2 \times 100.$$

Esta desigualdade mostra que o numero dado se acha comprehendido entre a^2 centenas, e $(a+1)^2$ centenas; sua raiz quadrada será comprehendida entre a dezenas, e $(a+1)$ dezenas; isto é,

$$a \times 10 < \sqrt{23796583} < (a+1) \times 10;$$

logo a dezenas é o maior numero de dezenas contido na raiz quadrada do numero dado ; o que demonstra o theorema proposto.

Somos pois levados a extrahir a raiz quadrada do numero 237965.

Esse numero sendo maior que 100, sua raiz é maior que 10, logo o numero 237965 encerra *o quadrado das dezenas de sua raiz, o duplo producto das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades*. O quadrado das dezenas não podendo achar-se senão nas centenas do numero, separemos os dous ultimos algarismos á direita, como não pertencendo á aquelle quadrado : em virtude do theorema acima demonstrado, obtem-se as dezenas d'esta nova raiz, extrahindo a raiz do maior quadrado contido nas 2379 centenas, consideradas como unidades simples. O numero 2379 sendo maior que 100, separemos os dous ultimos algarismos á direita, e busquemos a raiz quadrada do maior quadrado contido no numero 23, menor que 100. O maior quadrado é 4; 4 representa pois o algarismo das dezenas da raiz de 2379, ao mesmo tempo o algarismo das mais altas unidades da raiz do numero dado. Determinão-se as unidades da raiz

quadrada de 2379, subtrahindo 16 de 23, e escrevendo ao lado do resto 7 os dous outros algarismos 79 separados á direita ; o numero 779 assim obtido encerra as duas outras partes do quadrado : *o duplo producto das 4 dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades ;* a primeira parte não podendo exprimir unidades de ordem inferior ás dezenas, não poderá acharse senão nas 77 dezenas do numero 779; separemos pois o ultimo algarismo 9 á direita, e consideremos as 77 dezenas, que podem encerrar alem do duplo producto das dezenas pelas unidades, dezenas provindo da reserva feita sobre o quadrado das unidades, e as dezenas do resto, se houver. É claro que, se tivessemos o duplo producto puro das 4 dezenas da raiz pelas unidades, dividindo esse producto por um dos seos factores (o dobro das dezenas), teriamos por quociente o outro, que é o algarismo das unidades. Ora 77 dezenas não sendo esse producto puro, pode acontecer que dividindo 77 pelo dobro das dezenas, não se obtenha o verdadeiro algarismo das unidades, porém um algarismo mais forte, o que terá lugar logo que o dobro das dezenas de raiz fôr contido nas dezenas da reserva do quadrado das unidades, e do resto. Não obstante, dividamos 77 por 8, dobro das dezenas, o quociente é 9 ; verifica-se o algarismo 9, escrevendo á direita de 8, dobro das dazenas, o algarismo 9, e multiplicando o numero assim formado 89 pelo mesmo numero 9; operando assim e supponde ser 9 o verdadeiro algarismo das unidades, forma-se o quadrado das unidades multiplicando 9 por 9, e o duplo producto das dezenas pelas unidades, multiplicando 8 por 9 ; porém a somma 801 d'essas duas partes do quadrado sendo maior que o resto 779, que deve contel-os, segue-se que o algarismo 9 é muito forte; diminue-se 9 de uma unidade, verifica-se da mesma maneira o algarismo 8 ; 704, producto de 88 por 8, podendo ser subtrahido de 779, conclue-se que 8 é o verdadeiro algarismo das unidades da raiz ; 48 é a raiz quadrada do maior quadrado contido em 2379, e ao mesmo tempo em virtude do theorema acima demonstrado as dezenas da raiz quadrada do maior quadrado contido no numero 237965.

Achar-se-hão as unidades d'esta raiz, repetindo identicamente os raciocinios que ainda ha pouco se fizerão; subtrahindo de 2379 o quadrado de 48, e escrevendo á direita do resto 75 os dous ultimos algarismos 65, forma-se o numero 7565, cujas dezenas 756 divididas por 96, dobro das dezenas da raiz, dão por quociente 7, que é o verdadeiro algarismo das unidades, por isso que o producto 967 por 7 é mais fraco que o resto 7565. Logo, o numero 487 representa a raiz quadrada do maior quadrado contido em 237965, e ao mesmo tempo as dezenas da raiz quadrada do numero dado.

Em fim procedendo da mesma maneira, obter-se-ha as unidades da raiz buscada: subtrahindo de 237965 o quadrado de 487, e escrevendo á direita do resto 796 os dous ultimos algarismos 83, forma-se o numero 79683, cujas dezenas 7968, divididas por 974, dobro da raiz, dão por quociente 8, que é o verdadeiro algarismo das unidades, visto que o producto de 9748 por 8 é menor que 79683. O numero 4878 é a raiz quadrada do maior quadrado contido no numero dado.

Observação. Para termos um resto qualquer por exemplo 796, não ha necessidade de subtrahir do numero 237965 o quadrado de 487, basta subtrahir do resto precedente 7565 o producto 6769 de 967 por 7, que é a somma do dobro do producto de 48 por 7, mais o quadrado de 7.

Dos raciocinios precedentes resulta a seguinte regra:

278. Regra. *Para extrahir a raiz quadrada do maior quadrado contido em um numero inteiro, divide-se o numero inteiro em classes de dous algarismos cada uma indo da direita para a esquerda, extrahe-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na primeira classe, e obtem-se o algarismo das mais altas unidades da raiz. Faz-se o quadrado d'essa raiz, que se diminue da primeira classe á esquerda; ao lado da differença escreve-se a seguinte classe, o que forma o primeiro resto; divide-se este resto menos o seo ultimo algarismo á direita pelo dobro da raiz, acha-se assim o segundo algarismo da raiz, ou um algarismo muito forte. Para verifical-o, escreve-se o dito algarismo á direita do dobro da raiz e multiplica-se por elle*

mesmo o numero resultante: se o producto poder ser subtrahido do resto, o algarismo é bom, no caso contrario emprega-se um algarismo mais fraco de uma unidade, e recomeça-se a verificação. A' direita do resto obtido escreve-se a seguinte classe, na qual se separa o ultimo algarismo á direita, e assim successivamente até que a ultima classe tenha sido empregada.

Typo da operação :

```
23|79|65|83  | 4878
16           |-------------------
-----        |   88|  967|  9748
 779         |    8|    7|     8
 704         |-----|-----|------
------       |  704| 6769| 77884
  7565       |     |     |
  6769       |
-------      |
  79683      |
  77984      |
-------      |
   1699      |
```

279. Na pratica não se opera d'esta maneira, effectuão-se mentalmente as subtracções assim como as multiplicações; dispõe-se a operação do seguinte modo.

```
23.79.65.83 | 4878
 7 79       |----------------
   75 65    | 88 . 967 9748
    7 96 83 |
       16 99|
```

Appliquemos ainda a regra precedente ao seguinte exemplo

```
4206 4 3 2 | 2050
 206.4     |------
    3 93.2 |  405
```

PROVA.

280. É claro que se ao quadrado de 2050, que é 4202500, ajuntar-se o resto 3932, deve-se obter por somma o numero dado, se a operação fôr exacta.

281. *Observação I.* Se n representa o numero de algarismos de um numero N, $\sqrt{N}$ terá $\frac{n}{2}$ algarismos se n é par, e $\frac{n-1}{2}+1$ se n é impar. O resto final 1699 é o excesso do numero dado sobre o quadrado da raiz achada ou sobre o maior quadrado inteiro contido n'esse numero.

282. *Observação II.* As divisões, que fornecem os algarismos da raiz, excepto o primeiro, podem dar algarismos muito fortes de muitas unidades ; diminuindo-os successivamente de uma unidade, chega-se ao algarismo verdadeiro; porém algumas vezes diminue-se o algarismo de muitas unidades ao mesmo tempo e então pode-se obter um algarismo muito fraco; o seguinte theorema nos preserverá d'esse erro.

283. THEOREMA. *O resto obtido na extracção de uma raiz quadrada não pode exceder o dobro da raiz.*

Seja N um numero, R sua raiz, e r o resto, de maneira que

$$N = R^2 + r.$$

Supponhamos $r > 2R$; r sendo um numero inteiro é ao menos igual a $2R + 1$, então teriamos :

$$N = R^2 + 2R + 1, \text{ e } \sqrt{N} = R + 1,$$

o que é impossivel, visto termos supposto ser R^2 o maior quadrado contido em N.

284. Tendo extrahido a raiz quadrada de um numero podemos sem recomeçar novos calculos obter essa raiz a *menos de meia unidade por excesso ou por defeito.*

THEOREMA. *Se o resto* r *proveniente da extracção da raiz quadrada de um numero* N *é menor ou igual á raiz achada* R, R *é o valor de* $\sqrt{N}$ *a menos de meia unidade por defeito ; e se é superior á raiz,* R + 1 *é o valor de* $\sqrt{N}$ *a menos de meia unidade por excesso.*

Temos com effeito :

$$N = R^2 + r$$

e

$$(R + \tfrac{1}{2})^2 = R^2 + R + \tfrac{1}{4} ;$$

comparemos N e $(R + \frac{1}{2})^2$; se $r \leqq R$, temos :

$$N < (R + \tfrac{1}{2})^2 \text{ e } \sqrt{N} < R + \tfrac{1}{2} ;$$

por conseguinte $\sqrt{N}$ se approxima mais de R, que de R + 1.
Se $r > R$, temos

$$N > (R + \tfrac{1}{2})^2, \text{ e } \sqrt{N} > R + \tfrac{1}{2}$$

logo $\sqrt{N}$ se approxima mais de R + 1, que de R, o que demonstra o theorema.

DEFINIÇÃO DA RAIZ QUADRADA DE UM NUMERO QUE NÃO É QUADRADO PERFEITO.

285. Seja N um numero inteiro que não é quadrado perfeito e outro numero inteiro ; é facil ver-se que $\frac{N \times p^2}{p^2} = N$; R re-

presentando a raiz quadrada do maior quadrado contido em $N \times p^2$, temos :

$$\left(\frac{R}{p}\right)^2 < N < \left(\frac{R+1}{p}\right)^2$$

Tomando outros numeros p', p'', p'''.... gradualmente maiores que p, e operando da mesma maneira, teremos as duas series de numeros

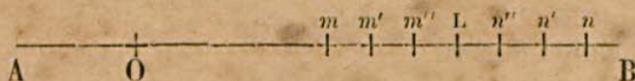
$$\frac{R}{p}, \quad \frac{R'}{p'}, \quad \frac{R''}{p''}, \quad \frac{R'''}{p'''} \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{R+1}{p}, \quad \frac{R'+1}{p'}, \quad \frac{R''+1}{p''}, \quad \frac{R'''+1}{p'''} \ldots\ldots\ldots$$

Os quadrados dos numeros da primeira linha são todos inferiores a N, e os quadrados da segunda são superiores a N ; por conseguinte um numero qualquer da segunda linha é maior que um numero da primeira.

Comparemos um numero da primeira linha com o seo correspondente da segunda ; os dous primeiros differem em $\frac{1}{p}$, os dous outros em $\frac{1}{p'}$, e os seguintes em $\frac{1}{p''}$, em $\frac{1}{p'''}$ ...... ; ora $p, p' p'' p'''$...... podem crescer indefinidamente e tornarem-se tão grandes quanto se queira ; logo, a differença de dous numeros correspondentes pode ser tão pequena quanto se queira. Supponhamos que esses numeros representem linhas, e que essas linhas sejão contadas a partir de um ponto fixo O, tomado sobre uma recta AB,

m m' m'' L n'' n' n

A O B

Uma parte d'essa linha AB receberá as extremidades das linhas Om, Om', Om''.... que medem os numeros da primeira

linha horizontal, e outra parte as extremidades das linhas On, On', On''.... que medem os numeros da segunda linha horizontal; é claro que entre essas duas regiões de linhas não pode haver intervallo algum; ellas achão-se separadas por um ponto L, *ponto de demarcação*. OL é a grandeza, cuja medida é $\sqrt{N}$. Em virtude do exposto, vê-se que um numero é maior ou menor que $\sqrt{N}$, se o seo quadrado é maior ou menor que N.

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA DE UM NUMERO QUALQUER POR APPROXIMAÇÃO.

286. Seja N um numero qualquer, de que buscamos a raiz quadrada approximada a menos de $\frac{1}{n}$.

Extrahir a raiz de N a menos de $\frac{1}{n}$ *é buscar o maior multiplo*, $x \times \frac{1}{n}$ *ou* $\frac{x}{n}$, *da fracção* $\frac{1}{n}$, *contido em* $\sqrt{N}$, de modo que

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{n};$$

elevando ao quadrado, as mesmas relações de grandeza existirão

$$\frac{x^2}{n^2} < N < \frac{(x+1)^2}{n^2},$$

multiplicando por n^2

$$x^2 < N \times n^2 < (x+1)^2,$$

e extrahindo a raiz quadrada, temos :

$$x < \sqrt{N \times n^2} < x + 1 ;$$

extrahindo a raiz quadrada de $N \times n^2$ a menos de uma unidade obtem-se o valor de x, que dividido por n dará a raiz quadrada de N, approximada a menos de $\frac{1}{n}$.

Regra. *Para extrahir a raiz quadrada de um numero N a menos de* $\frac{1}{n}$, *multiplica-se esse numero pelo quadrado do denominador da fracção, que marca a approximação, extrahe-se a raiz quadrada do producto a menos de uma unidade e divide-se essa raiz pelo denominador da dita fracção.*

Appliquemos a regra precedente a alguns exemplos.

Exemplo I. *Calcular* $\sqrt{5}$ *a menos de* $\frac{1}{12}$.

Multiplica-se 5 por 12^2, extrahe-se a raiz quadrada do producto 720 a menos de uma unidade, que é 26; $\frac{26}{12}$ é a raiz buscada a menos de $\frac{1}{12}$.

Exemplo II. *Calcular* $\sqrt{13}$ *approximada a menos de* $\frac{13}{11}$.

Como a fracção $\frac{3}{11}$ não é da forma $\frac{1}{n}$, emprega-se a fracção $\frac{1}{\frac{11}{3}}$, que lhe é igual: n n'este caso é um numero fraccionario, no que não ha inconveniente algum, por isso que as operações arithmeticas relativas ás fracções de termos inteiros subsistem quando se trata de fracções d'esse genero (nº216). Multiplica-se 13 por $\frac{11^2}{3^2}$, e do producto $\frac{1573}{9}$ extrahe-se a raiz quadrada a menos d'uma unidade que é 13, e $\frac{13}{\frac{11}{3}}$ ou $13 \times \frac{3}{11}$ é a raiz pedida a menos de $\frac{3}{11}$

287. É claro que n sendo um numero qualquer pode ser uma potencia de 10 :

$$n = 10^m, \text{ e } \frac{1}{n} = \frac{1}{10^m}.$$

A approximação, marcada pela fracção $\frac{1}{10^m}$, é a mais empregada e a mais commoda quando se trata de extracções de raiz. A regra é a mesma : *multiplica-se o numero dado por* 10^{2m}, *o que se faz escrevendo á sua direita* 2 m *zeros, extrahe-se a raiz quadrada a menos d'uma unidade do numero resultante, e divide-se essa raiz por* 10^m.

Appliquemos a regra precedente a alguns exemplos.

Exemplo I. *Calcular* $\sqrt{3}$ *à menos de* $\frac{1}{10^3}$.

Multiplica-se 3 por 10^6, o que dá 3000000; a raiz quadrada de 3000000 a menos de uma unidade é 1732, a raiz buscada é $\frac{1732}{1000}$ ou 1,732 a menos de $\frac{1}{1000}$.

Exemplo II. *Calcular* $\sqrt{2}$ *a menos de* $\frac{1}{10_7}$.

Multiplica-se 2 por 10^8, e do producto 200000000 extrahe-se a raiz quadrada a menos d'uma unidade que, é 14142 ; $\frac{14142}{10000}$ ou, 1,4142 é a raiz quadrada de 2 a menos de $\frac{1}{10000}$.

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA DAS FRACÇÕES ORDINARIAS.

288. Primeiro caso. *Os dous termos da fracção dada são quadrados perfeitos.*

N'este caso obtem-se a raiz quadrada de uma fracção, extrahindo a raiz quadrada do seo numerador, assim como a do seo denominador (nº 268).

Assim $\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$, por isso que $\frac{7}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{49}{9}$.

Segundo caso. *O denominador somente é quadrado perfeito.*
N'este caso extrahe-se a raiz quadrada do numerador a menos d'uma unidade, e dá-se por denominador a essa raiz a raiz quadrada do denominador da fracção dada; isto resulta do que dissemos (nº 286).

Assim $\sqrt{\frac{7}{49}}$ é $\frac{2}{7}$ a menos de $\frac{1}{7}$.

Terceiro caso. *Os dous termos da fracção dada não são quadrados perfeitos.*

Multiplicando os dous termos da fracção dada pelo seo denominador obtem-se por denominador da fracção equivalente um quadrado perfeito, e opera-se como no caso precedente

Assim $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\times 7}{7\times 7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$; $\sqrt{21}$ a menos de uma unidade sendo 4, $\frac{4}{7}$ é o valor de $\sqrt{\frac{3}{7}}$ a menos de $\frac{1}{7}$.

289. *Observação.* Quando o denominador da fracção dada não é um numero primo, em lugar de multiplicar-se os dous termos da fracção por esse denominador, multiplicão-se os dous termos da fracção pelos factores primos do denominador, cujos expoentes não forem pares (nº 272).

Assim :

$$\sqrt{\frac{23}{135}}=\sqrt{\frac{23}{3^3 5}}=\sqrt{\frac{23\times 3\times 5}{3^4\times 5^2}}=\frac{\sqrt{23\times 3\times 5}}{3^2\times 5}=\frac{\sqrt{345}}{45};$$

a raiz quadrada a menos d'uma unidade de 345 sendo 18, $\frac{18}{45}$ ou $\frac{2}{5}$ é o valor de $\sqrt{\frac{23}{135}}$ a menos de $\frac{1}{45}$.

Muitas vezes ha necessidade de calcular-se a raiz quadrada de uma fracção com certa approximação, designada pela questão;

para isso applicar-se-ha a regra (nº 286), por quanto o numero N pode ser um numero inteiro ou fraccionario.

Appliquemos essa regra aos exemplos seguintes.

Exemplo I. *Calcular* $\sqrt{\frac{3}{7}}$ *a menos de* $\frac{1}{12}$.

Multiplicando $\frac{3}{7}$ por 12^2 temos por producto $\frac{432}{7}$; a parte inteira d'essa fracção é 65; a raiz quadrada de 65 a menos d'uma unidade sendo 8, $\frac{8}{12}$ ou $\frac{2}{3}$ é a raiz quadrada buscada a menos de $\frac{1}{12}$.

Exemplo II. *Calcular* $\sqrt{\frac{7}{13}}$ *a menos de* $\frac{3}{50}$.

Emprega-se em lugar de $\frac{3}{50}$ a fracção equivalente $\frac{1}{\left(\frac{50}{3}\right)}$; multiplica-se $\frac{7}{13}$ por $\frac{50^2}{3^2}$, o que dá por producto $\frac{17500}{117}$; a parte inteira da fracção $\frac{17500}{117}$ é 149, e a raiz de 149 a menos d'uma unidade é 12; $\frac{12}{\frac{50}{3}}$ ou $12 \times \frac{3}{50}$ é a raiz buscada a menos de $\frac{3}{50}$.

EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA DOS NUMEROS DECIMAES.

290. Primeiro caso. *O numero dos algarismos decimaes é par.*

Seja proposto calcular $\sqrt{38,6884}$; é facil ver-se que:

$$\sqrt{38,6884} = \sqrt{\frac{386884}{10000}} = \sqrt{\frac{386884}{10^4}}$$

estamos no caso de um numero fraccionario, cujo denominador é quadrado perfeito.

SEGUNDO CASO. *O numero dos algarismos decimaes é impar.* Escrevendo um zero á direita do numero decimal entramos no caso precedente.

Do exposto resulta a seguinte regra :

291. REGRA. *Para extrahir a raiz quadrada de um numero decimal, em primeiro lugar torna-se par o numero dos algarismos decimaes, se o não fôr ; extrahe-se a raiz quadrada do numero resultante a menos d'uma unidade e separa-se á direita da raiz um numero de algarismos decimaes igual á metade dos algarismos decimaes do numero dado.*

EXERCICIOS.

QUESTÕES RESOLVIDAS.

I. *O quadrado de um numero impar é um multiplo de 8 augmentado com uma unidade.*

Solução. Se $2 \times n + 1$ representa o numero impar, e N o seo quadrado, temos

$$N = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1;$$

$n(n + 1)$ é divisivel por 2, logo $4n(n + 1)$ é divisivel por 8, logo N é um multiplo de 8 mais uma unidade.

II. *Se um numero par é a somma de dous quadrados, a metade d'esse numero será tambem a somma de dous outros quadrados.*

Solução. Seja N um numero par, tal que :

$$N = a^2 + b^2,$$

a e b são por conseguinte ambos pares ou ambos impares ; ora a igualdade supra é identica á seguinte :

$$\frac{N}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

logo, o theorema está demonstrado, visto que $\frac{a+b}{2}$, e $\frac{a-b}{2}$ são numeros inteiros.

QUESTÕES NÃO RESOLVIDAS.

III. *Se dous numeros não são divisiveis por 2 nem por 3, a differença dos seos quadrados é divisivel por 24.*

IV. *Se um quadrado inteiro é igual á somma de dous outros, um d'esses quadrados é divisivel por 5.*

V. *A somma dos quadrados de dous numeros é 1552, e sua differença 1040. — Determinar esses numeros.*

VI. *A differença dos quadrados de dous numeros consecutivos é 65. — Determinar esses numeros.*

VII. *Calcular* $\sqrt{\frac{27}{7}}$ *com uma approximação de* $\frac{1}{100}$,

VIII. *Calcular* $\sqrt{\frac{2,1828}{3,16}}$ *a menos de* $\frac{1}{13}$.

IX. *Calcular* $\sqrt{\frac{11}{13}}$ *a menos de* $\frac{3}{50}$.

X. *Demonstrar que a somma dos n primeiros numeros impares é divisivel por* n^2.

CAPITULO II.

CUBO. — RAIZ CUBICA.

Cubo.

292. *Cubo* ou *terceira potencia* d'um numero é o producto de tres factores iguaes a esse numero. Assim o cubo de 7, que se escreve 7^3, é o producto $7 \times 7 \times 7 = 343$.

Applicando a mesma definição a uma fracção, por exemplo $\frac{3}{5}$, temos :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{3^3}{5^3};$$

segue-se que *para elevar uma fracção ao cubo é necessario elevar ao cubo cada um dos sêos termos, e se a fracção é irreduzivel, o cubo será tambem uma fracção irreduzivel.*

Os cubos dos numeros :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

são :

1 8 27 64 125 216 343 512 729 1000.

Os numeros da segunda linha chamão-se *cubos perfeitos.*

293. Empregando os mesmos raciocinios, que fizemos na

theoria do quadrado, será facil demonstrar os dous theoremas seguintes.

THEOREMA I. *Quando um numero não é cubo perfeito, não ha numero algum, que elevado ao cubo, possa reproduzir o primeiro.*

THEOREMA II. *Se os dous termos de uma fracção irreduzivel não são cubos perfeitos, não ha numero algum, que elevado ao cubo, possa reproduzir a fracção dada.*

294. THEOREMA III. *O cubo da somma de dous numeros é igual ao cubo do primeiro mais tres vezes o producto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais tres vezes o producto do quadrado do segundo pelo primeiro, mais o cubo do segundo.*

Se $a + b$, representa a somma dos dous numeros a e b, é claro que :

$$(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b);$$

porem vimos (nº 269) que :

$$(a + b) \times (a + b) = a^2 + 2 \times a \times b + b^2;$$

por conseguinte :

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2 \times a \times b + b^2) \times (a + b) = a^3 +$$
$$+ 3 \times a^2 \times b + 3 \times b^2 \times a + b^3. \text{ (nº 79).} \quad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Observação I. Todo numero podendo ser decomposto em dezenas e unidades, *o cubo de um numero se compõe do cubo das dezenas, de tres vezes o quadrado das dezenas pelas unidades, de tres vezes o quadrado das unidades pelas dezenas, e do cubo das unidades.*

Assim por exemplo :

$$(3436)^3 = (3430+6)^3 = 3430^3 + 3 \times 3430^2 \times 6 + 3 \times 6^2 \times 3430 + 6^3.$$

Observação II. A differença entre os cubos de dous numeros consecutivos é igual a tres vezes o quadrado do menor mais tres vezes o menor mais um.

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3 \times a^2 + 3 \times a + 1.$$

Observação III. Em virtude do que dissemos (nº 270) vemos que o cubo de um numero qualquer pode terminar em qualquer dos nove primeiros numeros.

Observação IV. Um numero inteiro, terminado em zeros, não poderá ser cubo perfeito, se o numero de zeros não fôr multiplo de tres; esta condição é necessaria, mas não é sufficiente.

295. THEOREMA IV. *Todo o numero, que decomposto em seos factores primos, contem esses factores, affectados de expoentes, multiplos de 3, é cubo perfeito.*

Esta condição é necessaria e sufficiente.

A demonstração d'este theorema é identica á do correspondente no quadrado.

Consequencia. Pode-se em virtude do theorema precedente procurar o menor numero possivel pelo qual se deve multiplicar outro para tornal-o cubo perfeito.

Raiz cubica.

296. *Raiz cubica de um numero é outro numero que tomado tres vezes por factor reproduz o primeiro.*

Assim 4 é a raiz cubica de 64, por isso que :

$$4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Indica-se esta operação por meio do signal $\sqrt[3]{\ }$, o algarismo 3 é o *indice do radical*; escreve-se:

$$\sqrt[3]{64} = 4.$$

Definiremos a raiz cubica de um numero que não é cubo perfeito da mesma maneira que a raiz quadrada.

A operação arithmetica que tem por fim determinar a raiz cubica de um numero chama-se *extracção da raiz cubica.*

EXTRACÇÃO DA RAIZ CUBICA DE UM NUMERO QUALQUER APPROXIMADA A MENOS DE UMA UNIDADE.

297. Extrahir a raiz cubica de um numero a menos d'uma unidade é buscar a raiz cubica do maior cubo inteiro contido n'esse numero.

298. THEOREMA. *A raiz cubica, a menos d'uma unidade, de um numero que não é inteiro é a mesma que a da sua parte inteira.*

Demonstra-se este theorema, empregando os mesmos raciocinios (nº 276).

Observação. A raiz cubica de 1000 sendo 10, a raiz cubica de todo numero menor que 1000 será menor que 10, de modo que pela taboa dos cubos dos nove primeiros numeros poder-se-ha obter facilmente a raiz cubica de todo numero menor que 1000.

299. PROBLEMA GERAL. *Determinar a raiz cubica de um numero qualquer.*

Seja por exemplo o numero 31415926 de que buscamos a raiz cubica.

O numero dado 31415926 sendo maior que 1000, sua raiz cubica é maior que 10, e contem dezenas e unidades; o cubo

d'essa raiz compõe-se do *cubo das dezenas, de tres vezes o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, de tres vezes o producto do quadrado das unidades pelas dezenas e do cubo das unidades*. Tratemos de separar essas quatro partes que se achão encerradas no numero proposto.

A primeira parte, *o cubo das dezenas*, não podendo dar unidades inferiores a mil, se achará nos mil do numero dado que separamos, os quaes podem conter, além d'esse cubo, os mil resultando da reserva feita sobre as outras partes do cubo.

THEOREMA. *Para determinar as dezenas da raiz cubica de um numero, basta extrahir-se a raiz cubica do maior cubo contido nos mil do numero, considerados como unidades simples.*

O raciocinio para demonstrar este theorema é o mesmo que fizemos (nº 277 th.).

Somos pois levados a extrahir a raiz cubica do maior cubo contido no numero 31415; este numero sendo ainda maior que 1000 e sua raiz maior que 10, separemos os tres ultimos algarismos, e consideremos o numero 31.

O maior cubo contido em 31 é 27, cuja raiz cubica é 3; 3 são pois as dezenas da raiz cubica do numero 31415, e ao mesmo tempo o algarismo das mais fortes unidades da raiz buscada.

Subtrahindo 27 de 31, e escrevendo ao lado da differença 4 os tres algarismos seguintes 415 do numero dado, temos o primeiro resto 4415, que contem as outras tres partes do cubo; *tres vezes o quadrado das 3 dezenas pelas unidades, etc.*

O triplo producto do quadrado das 3 dezenas pelas unidades não pode dar unidades inferiores ás centenas, e será contido nas 44 centenas do resto, que podem encerrar além d'esse triplo producto as centenas refluindo da reserva de centenas feita sobre as duas ultimas partes do cubo e sobre o resto, se houver; dividindo 44 por 3×3^2 ou 27 (triplo quadrado das dezenas) acharemos o algarismo das unidades, ou um algarismo muito forte; o quociente da divisão de 44 por 27 é 1; verificaremos o algarismo 1, escrevendo-o á direita de 3, fazendo o cubo de 31, e vendo se esse cubo pode ser substrahido

do numero 31415, que deve contel-o ; o cubo de 31, que é 29791, sendo inferior a 31415, conclue-se que 1 é o verdadeiro algarismo ; 31 é a raiz cubica do maior cubo contido no numero 31415, e ao mesmo tempo as dezenas da raiz cubica do numero dado.

Subtrahindo 29791, cubo de 31, de 31415 e escrevendo ao lado da differença 1624 os tres ultimos algarismos 926, temos o segundo resto 1624926, que contem os tres outras partes do maior cubo inteiro incluso no numero dado.

Pelos raciocinios precedentes, para acharmos as unidades da raiz dividiremos 16249 por 3×31^2 ou 2883 ; o quociente 5 é o verdadeiro algarismo das unidades, por isso que o cubo de 315 sendo 31255875 pode ser subtrahido do numero dado ; a differença d'elles 160051, que é o resto da operação, é o excesso do numero dado sobre o maior cubo inteiro contido n'esse numero.

Do raciocinio precedente resulta a seguinte regra :

300. Regra. *Para extrahir a raiz cubica do maior cubo inteiro contido em um numero, divide-se esse numero em classes de tres algarismos, á partir da direita ; extrahe-se a raiz cubica do maior cubo incluso na primeira classe, que pode constar de um ou dous algarismos, e obtem-se assim o algarismo das mais fortes unidades da raiz ; faz-se o cubo d'essa raiz, que se subtrahe da primeira classe, e á direita da differença escrevem-se os tres algarismos seguintes. o que forma o primeiro resto ; divide-se as centenas d'esse resto pelo triplo quadrado do algarismo achado, o quociente dá o segundo algarismo da raiz, ou um algarismo muito forte. Para verifical-o, escreve-se o segundo algarismo á direita do primeiro, e compõe-se o cubo do numero assim formado ; se esse cubo pode ser subtrahido do numero formado pelas duas primeiras classes, o segundo algarismo da raiz é exacto.*

Ajuntando ao lado da differença a classe seguinte obtem-se o segundo resto, sobre o qual se opera como sobre o primeiro, e assim successivamente até que a ultima classe do numero dado seja empregada.

Eis o typo da operação :

<table>
<tr>
<td>31|415|926
27
―――――
4 4|15
═════
31 415
29 791
―――――
1 624 9|26
═════
31 415 926
31 255 875
―――――
160 051</td>
<td>315
―――――
$27 = 3.\ 3^2$
$2883 = 3.\ 31^2$

31
31
――
31
93
――
961
31
――
961
2883
――
29791</td>
<td>

315
315
――
1575
315
945
――
99225
315
――
496125
99225
297675
――
31255875</td>
</tr>
</table>

PROVA.

301. É claro que ajuntando ao cubo de 315, que é 31255875, o resto da operação 160051, devemos achar por somma o numero proposto, 31415926.

302. *Observação.* Se $3\,n$, $3\,n + 1$, $3\,n + 2$ é o numero dos algarismos de um numero N, será facil ver-se que $\sqrt[3]{N}$ terá n algarismos, ou $n + 1$.

303. Theorema. *O resto obtido na extracção da raiz cubica não pode exceder ao triplo quadrado da raiz achada mais o triplo d'essa raiz.*

Seja N um numero, R sua raiz cubica, e r o resto da operação, de sorte que :

$$N = R^3 + r$$

se $r > 3\,R^2 + 3\,R$, teriamos quando menos :

$$r = 3\,R^2 + 3\,R + 1;$$

e como

$$r = N - R^3;$$

teriamos :

$$N - R^3 = 3\,R^2 + 3\,R + 1$$

ou

$$N = R^3 + 3\,R^2 + 3\,R + 1 = (R + 1)^3,$$

o que é impossivel, por isso que R^3 é o maior cubo inteiro contido em N.

Por meio d'este theorema podemos verificar se um algarismo collocado na raiz não é muito fraco, observando se o resto preenche a condição exigida pelo theorema, que acabámos de demonstrar.

EXTRACÇÃO DA RAIZ CUBICA DE UM NUMERO QUALQUER POR APPROXIMAÇÃO.

304. Seja N um numero de que buscamos a raiz cubica approximada a menos de $\frac{1}{n}$.

Em virtude da definição (nº 286), temos :

$$\frac{x}{n} < \sqrt[3]{N} < \frac{x+1}{n}$$

ou

$$\frac{x^3}{n^3} < N < \frac{(x+1)^3}{n^3};$$

multiplicando por n^3, as mesmas relações de grandeza existirão, logo :

$$x^3 < N \times n^3 < (x+1)^3,$$

d'onde:
$$x < \sqrt[3]{N \times n^3} < (x+1);$$

os dous termos extremos differindo em uma unidade, teremos x extrahindo a raiz cubica, a menos de uma unidade, do producto $N \times n^3$.

305. Regra. *Para extrahir a raiz cubica de um numero N a menos de* $\frac{1}{n}$, *multiplica-se* N *pelo cubo do denominador da fracção, que marca a approximação, extrahe-se a raiz cubica do producto a menos de uma unidade, e divide-se essa raiz pelo denominador* n *da fracção* $\frac{1}{n}$.

Appliquemos a regra precedente aos seguintes exemplos:

Exemplo I. *Calcular* $\sqrt[3]{29}$ *a menos de* $\frac{1}{12}$.

Segundo a regra multiplicaremos 29 por 12^3, o que dá 50112, e extrahiremos a raiz cubica, a menos de uma unidade, de 50112; esta é comprehendida entre 36 e 37; 37 approximando-se mais da verdade, $\frac{37}{12}$ é a raiz cubica de 29 a menos de $\frac{1}{12}$, por excesso.

Exemplo II. *Calcular* $\sqrt[3]{13}$ a menos de $\frac{1}{10^2}$.

Multiplicaremos 13 pelo cubo de 10^2, o que dá 13000000; extrahiremos a raiz cubica, a menos de uma unidade de 13000000, que é 235, ou 236; dividiremos essa raiz por 10^2, o que dá $\frac{235}{100}$ ou 2,35; tal é a raiz cubica de 13 a menos de $\frac{1}{100}$.

EXTRACÇÃO DA RAIZ CUBICA DAS FRACÇÕES ORDINARIAS.

306. Primeiro caso. *Os dous termos da fracção são cubos perfeitos.*

Teremos a raiz cubica extrahindo a raiz cubica do numerador e a do denominador (nº 292).

SEGUNDO CASO. O *denominador somente é cubo perfeito.*

Teremos a raiz cubica approximada extrahindo a raiz cubica do numerador a menos de uma unidade, e dividindo-a pela raiz cubica exacta do denominador (nº 304).

TERCEIRO CASO. *Os dous termos da fracção não são cubos perfeitos.*

Este caso entra no segundo, tornando-se o denominador um cubo perfeito, o que se faz ou multiplicando os dous termos da fracção pelo seo denominador, ou operando como dissemos (nº 289).

EXTRACÇÃO DA RAIZ CUBICA DOS NUMEROS DECIMAES.

307. PRIMEIRO CASO. *O numero de algarismos decimaes é multiplo de tres.*

Seja por exemplo 24,628247 de que se busca a raiz cubica.

Será facil ver-se que:

$$\sqrt[3]{24,628247} = \sqrt[3]{\frac{24628247}{1000000}} = \sqrt[3]{\frac{24628247}{10^6}}$$

e operando como dissemos (nº 305), teremos a raiz pedida.

SEGUNDO CASO. *O numero de algarismos decimáes é qualquer.*

Neste caso escreveremos zeros sufficientes á direita do numero dado a fim de tornar o numero de algarismos decimaes multiplo de tres, e operaremos como no caso precedente.

EXERCICIOS.

I. *A somma dos cubos de dous numeros é 23625, e um d'estes 20. — Qual o outro?*

II. *A somma dos cubos de dous numeros é* 189000, *e a differença dos cubos d'esses mesmos numeros é* 61000. — *Determinar esses numeros.*

III. *Todo o numero que é quadrado e cubo ao mesmo tempo, é tambem sexta potencia.*

IV. *Demonstrar que, dividindo-se os cubos dos cinco primeiros numeros por* 6, *os restos que se obtem são as raizes cubicas d'aquelles numeros.*

V. *Um numero inteiro sendo dado, como se pode conhecer se elle é a differença de dous cubos consecutivos e achar esses cubos?*

VI. *Um numero inteiro não pode ser cubo perfeito se, o algarismo das unidades sendo* 2 *ou* 6, *o algarismo das dezenas é par.*

VII. *Um numero inteiro não pode ser cubo perfeito se, o algarismo das unidades sendo* 4 *ou* 8, *o algarismo das dezenas é impar.*

VIII. *Calcular* $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$ *a menos de* $\frac{3}{11}$.

IX. *Calcular* $\sqrt[3]{2}$ *o* 0,0001 *a menos de* 0,0001.

X. *Calcular* $\sqrt[3]{2,73}$ *a menos de* $\frac{3}{13}$.

CAPITULO III.

NUMEROS INCOMMENSURAVEIS. — CALCULO DOS RADICAES. — POTENCIAS SUPERIORES AO QUADRADO E CUBO.

308. As operações, que se executão sobre os numeros, representão as mesmas operações sobre as grandezas, por isso que os numeros são medidas de grandezas.

Duas grandezas são ditas *commensuraveis*, logo que admittem uma medida commum; a razão dos dous numeros abstractos que lhes servem de medida, e que chamou se numero fraccionario, é o valor da razão das duas grandezas.

Duas grandezas, que não admittem medida alguma commum, chamão-se *incommensuraveis*; o valor da razão d'essas grandezas não pode ser expresso por numero algum fraccionario, porém pode sér obtido com uma approximação tão grande, quanto se queira; á esse numero fraccionario, que tende a approximar-se do *valor limite* de uma grandeza incommensuravel, deo-se, o nome de *numero incommensuravel*.

Foi assim por exemplo que na extracção da raiz quadrada de um numero A, que não era quadrado perfeito, vimos que essa raiz não podia ser expressa por numero algum, e considerando os numeros como medidas de grandezas continuas, essa raiz era uma linha tal, que os quadrados dos numeros, que medião outras linhas menores ou maiores que aquella, erão numeros menores ou maiores que A; convencionou-se porem em representar essa linha pela raiz quadrada de A; isto é pelo symbolo $\sqrt{A}$, a que deo-se o nome de *numero incommensuravel*. É ainda uma extensão dada á nossa primeira definição de numero.

A Geometria offerece-nos muitos exemplos de grandezas incommensuraveis; a diagonal de um quadrado e um dos seos lados, tomado por unidade, são duas grandezas incommensuraveis; a razão d'essas grandezas é representada pelo numero incommensuravel $\sqrt{2}$; etc.

Operações sobre os numeros incommensuraveis.

309. Assim como extendemos aos numeros fraccionarios as operações e theoremas relativos aos numeros inteiros, assim tambem extenderemos aos numeros incommensuraveis as mesmas operações e theoremas, por isso que é util nas sciencias o generalisar-se; isto é encerrar-se debaixo da mesma denominação o maior numero possivel de ideas particulares.

Addição. Sejão $\sqrt{A}$ e $\sqrt{B}$ dous numeros incommensuraveis dados; esta operação tem por fim buscar um numero que exprima o valor de uma grandeza, que seja a somma das grandezas representadas pelos numeros $\sqrt{A}$, e $\sqrt{B}$; indica-se esta operação da mesma maneira que sobre os numeros commensuraveis.

Subtracção. Esta operação tem por fim buscar um numero que exprima o valor de uma grandeza, que seja a differença entre as grandezas, representadas pelos numeros incommensuraveis dados. Indica-se esta operação do mesmo modo que sobre os numeros commensuraveis.

Multiplicação. Quando o multiplicador é um numero commensuravel, a definição é a mesma que a dos numeros inteiros, e comprehende-se facilmente; assim o producto de $\sqrt{3}$ por 4 é um numero exprimindo uma grandeza 4 vezes maior que a que exprime $\sqrt{3}$; o producto de $\sqrt{3}$ por $\frac{4}{5}$ é um numero que exprime uma grandeza igual aos quatro quintos da que exprime $\sqrt{3}$.

Se o multiplicador é numero incommensuravel, a definição ordinaria da multiplicação não tem mais sentido algum. Definiremos do seguinte modo :

O producto de um numero qualquer A *por um numero incommensuravel* $\sqrt{B}$, *é um numero maior que os productos de* A *pelos numeros inferiores a* $\sqrt{B}$, *e menor que os productos de* A *pelos numeros superiores a* $\sqrt{B}$.

Indica-se esta operação entre os numeros incommensuraveis como nos numeros commensuraveis.

Divisão. Esta operação entre numeros incommensuraveis tem por fim achar um numero, que multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo.

Raiz quadrada e cubica. A definição é a mesma que para os numeros commensuraveis e comprehende-se facilmente.

Propriedades elementares dos numeros incommensuraveis.

310. Qualquer que fôr o numero incommensuravel dado, pode-se sempre achar dous numeros commensuraveis, differindo em uma quantidade tão pequena, quanto quizer-se, que comprehendão o numero incommensuravel dado; com effeito consideremos a seguinte serie :

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n} \dots\dots\dots \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}, \dots\dots;$$

os numeros d'esta serie vão crescendo sem limite ; logo, o numero incommensuravel proposto será comprehendido entre dous numeros commensuraveis consecutivos da serie supra, $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$, que differem em $\frac{1}{n}$; ora n pode ser tomado tão

grande quanto se queira, em seguida a fracção $\frac{1}{n}$ será tão pequena, quanto se queira.

Posto isto, *operar sobre numeros incommensuraveis significa operar sobre numeros commensuraveis approximados, que podem differir dos numeros incommensuraveis dados em quantidades tão pequenas, quanto se queira.*

Por conseguinte, o resultado das operações sobre os numeros incommensuraveis é o limite dos resultados obtidos logo que substituem-se aos numeros dados numeros commensuraveis successivos, que se approximão indefinidamente dos primeiros.

Em virtude do exposto, pode-se considerar como evidentes os seguintes theoremas que forão demonstrados no caso dos numeros commensuraveis.

I. *Pode-se inverter em um producto a ordem de seos factores sem alterar o valor do producto.*

II. *Para multiplicar-se um numero por um producto, basta multiplical-o par cada factor do producto successivamente.*

III. *Para multiplicar-se um producto por um numero basta multiplicar-se um dos factores pelo numero, conservando-se os outros factores.*

IV. *O producto de dous ou mais productos de muitos factores compõe-se de todos os factores, que entrão n'esses productos.*

É preciso notar-se que as regras do calculo sobre as fracções ordinarias de termos fraccionarios applicão-se aos numeros incommensuraveis.

Calculo dos radicaes.

311. Dá-se o nome de radical não somente ao signal $\sqrt[m]{}$, como tambem á quantidade $\sqrt[m]{a}$, *a* sendo um numero qualquer; o numero *m* é o *indice* do radical.

312. THEOREMA I. *O producto de muitos radicaes de mesmo indice é igual á raiz do producto das quantidades collocadas debaixo dos radicaes.*

Queremos demonstrar que :

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} = \sqrt{a \times b \times c}$$

com effeito

$$\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}\right)^m = a \times b \times c. \quad (\text{n}^\text{o}\ 92)\ ;$$

logo, a raiz do primeiro membro é igual a $\sqrt[m]{a \times b \times c}$. *o. q. e. n. d.*

Tendo de multiplicar por exemplo os dous radicaes $\sqrt{98}$ e $\sqrt{18}$, diremos :

$$\sqrt{98} \times \sqrt{18} = \sqrt{98 \times 18} = \sqrt{1764} = 42\ ;$$

isto mostra que o producto de dous numeros incommensuraveis pode ser um numero commensuravel.

O mesmo theorema permitte multiplicar um numero 5 por um radical $\sqrt{3}$, com effeito :

$$5 \times \sqrt{3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$$

Esta operação é o que se chama *introduzir um factor sob o radical.* Vemos que para isso cumpre elevar o factor a uma potencia de gráo, marcado pelo indice do radical.

Reciprocamente. Se a quantidade collocada debaixo de um radical pode ser decomposta em dous factores de maneira que um dos factores seja uma potencia exacta de mesmo gráo que o radical, tambem pode-se *tirar esse factor do radical.* Assim :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6 \times \sqrt{2}$$

313. THEOREMA II. *O quociente de dous radicaes de mesmo indice é igual á raiz do quociente das quantidades collocadas sob os radicaes.*

Queremos provar que :

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Com effeito, elevando o primeiro membro á potencia m, o que se faz elevando-se cada termo da fracção a essa potencia, temos $\frac{a}{b}$, logo a raiz do primeiro membro é igual á $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.
o. q. e. n. d.

Tendo de dividir os dous radicaes $\sqrt{1512}$ e $\sqrt{42}$, diremos :

$$\frac{\sqrt{1512}}{\sqrt{42}}=\sqrt{\frac{1512}{42}}=\sqrt{36}=6$$

O mesmo theorema permitte dividir um numero por um radical ou um radical por um numero; assim :

$$\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{64}{2}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

e

$$\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3^2}}=\sqrt{\frac{15}{9}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\,.$$

314. THEOREMA III. *Eleva-se um radical a uma potencia, elevando-se á mesma potencia a quantidade collocada debaixo do radical.*

Com effeito, é claro que

$$\begin{aligned}(\sqrt[m]{a})^n &= \sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\ldots\ldots \text{ (n° 88)} = \\ &= \sqrt[m]{a\times a\times a\times\ldots\ldots\ldots} \text{ (n° 312)} = \\ &= \sqrt[m]{a^n}.\end{aligned}$$

315. THEOREMA IV. *Extrahe-se a raiz de um radical multiplicando-se o indice do radical pelo indice da raiz, que se quer extrahir.*

Trata-se de demonstrar que :

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$$

Elevando o primeiro membro á potencia n, temos $\sqrt[m]{a}$, que elevado á potencia m dá a, logo o primeiro membro é a raiz de gráo $m \times n$ de a. *o. q. e. n. d.*

COROLLARIO. *Extrahe-se a raiz* m × n *de um numero* a *extrahindo-se a raiz* m *de* a, *e do resultado a raiz* n.

Em virtude do theorema precedente :

$$\sqrt[m \times n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

316. THEOREMA V. *Um radical não muda de valor quando se multiplica ou divide por um mesmo numero o indice do radical e o expoente da quantidade collocada sob o radical.*

Trata-se de demonstrar que :

$$\sqrt[n \times p]{a^{m \times p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ora :

$$\sqrt[n \times p]{a^{m \times p}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{m \times p}}} \quad \text{(nº 315).}$$

e

$$\sqrt[p]{a^{m \times p}} = \sqrt[p]{(a^m)^p} = a^m \quad \text{(nº 314);}$$

logo

$$\sqrt[n \times p]{a^{m \times p}} = \sqrt[p]{a^m}. \qquad \textit{o. q. e. n. d.}$$

COROLLARIO I. Simplifica-se um radical, dividindo-se seo indice e o expoente da quantidade collocada sob o radical pelo seo maior divisor commum.

Assim

$$\sqrt[21]{a^{35}}=\sqrt[7\times3]{a^{7\times5}}=\sqrt[3]{a^5}.$$

COROLLARIO II. *Reduzem-se muitos radicaes ao mesmo indice*, tomando-se por indice commum o producto de todos os indices, ou melhor ainda, o menor multiplo d'esses indices.

Esta operação muito importante appresenta-se todas as vezes que se tem de multiplicar ou dividir muitos radicaes de indices differentes.

Seja proposto multiplicar $\sqrt[3]{a}$ por $\sqrt{b}$; diremos:

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=\sqrt[3\times2]{a^2}\times\sqrt[3\times2]{b^3}=\sqrt[6]{a^2\times b^3}$$

e geralmente

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[m\times n]{a^n}=\sqrt[m\times n]{b^m}=\sqrt[m\times n]{a^n\times b^m}.$$

Extracção da raiz quadrada e cubica de um numero incommensuravel por approximação.

317. A regra que estabeleceo-se (n^os^ 286, 305) convem a um numero qualquer, por conseguinte a um numero incommensuravel.

Para calcular a expressão $\sqrt{3+\sqrt{7}}$ a menos de $\frac{1}{13}$ por exemplo, segundo a regra, multiplica-se por 13^2 o numero $(3+\sqrt{7})$;

$$(3+\sqrt{7})\times13^2=3\times13^2+\sqrt{7}\times13^2=3\times13^2+\sqrt{7\times13^4},$$

calculando-se $\sqrt{7 \times 13^4}$ a menos de uma umidade e ajuntando-se á raiz a quantidade 3×13^2, a somma é 954, cuja raiz a menos de uma unidade é 31; logo, $\frac{31}{13}$ é a raiz pedida.

Se o denominador da fracção que marca a approximação fosse uma potencia de 10, operar-se-hia da mesma maneira, ou melhor ainda segundo a regra dada (nº 287).

Tudo quanto dissemos na théoria da raiz cubica sobre os numeros inteiros e fraccionarios, convem tambem aos numeros incommensuraveis.

Extracção das raizes cujos indices só contem os factores 2 e 3.

318. Por meio da extracção da raiz quadrada e cubica pode-se extrahir a raiz de um numero, cujo indice não contem outros factores primos senão 2 e 3.

Raiz quarta. Seja proposto por exemplo calcular $\sqrt[4]{122}$; ora

$$\sqrt[4]{122} = \sqrt{\sqrt{122}} \qquad (\text{n}^\circ\ 315);$$

extrahindo a raiz quadrada de 122 a menos de uma unidade, e d'este numero a raiz quadrada a menos de uma unidade, teremos assim o numero pedido.

Raiz oitava. Seja proposto por exemplo calcular $\sqrt[8]{3246}$, sabe-se que:

$$\sqrt[8]{3246} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3246}}} \qquad (\text{n}^\circ\ 315);$$

chega-se ao resultado por meio de uma serie de extracções de raiz quadrada, a menos de uma unidade.

Raiz sexta. Seja proposto por exemplo calcular $\sqrt[6]{2432}$ a menos de uma unidade ; ora

$$\sqrt[6]{2432} = \sqrt[3]{\sqrt{2432}} \ ;$$

logo, para ter-se o numero buscado, basta extrahir-se a raiz quadrada do numero dado, e d'este a raiz cubica a menos de uma unidade.

EXERCICIOS.

I. *Calculando-se a menos de uma unidade* $\sqrt{A} = a, \sqrt{a} = b, \sqrt{b} = c$, *demonstrar directamente que c é a raiz oitava de* A *a menos de uma unidade.*

II. *Calcular a menos de* 0,01 *a expressão :*

$$x = \frac{15 + \sqrt{10}}{15 - \sqrt{10}} + \frac{30 - \sqrt{10}}{15 + \sqrt{10}} .$$

III. *Calcular* $\sqrt{3 + \sqrt[3]{3}}$ *a menos de o*, 001.

IV. *Calcular* $\sqrt[4]{245}$ *a menos de uma unidade.*

V. *Calcular* $\sqrt[6]{31415}$ *a menos de uma unidade.*

VI. *Calcular as expressões seguintes cum uma approximação de* 0,001

$$\sqrt[3]{7 + 3\sqrt{7}} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{7 - 3\sqrt{7}}$$

VII. *Verificar a seguinte igualdade :*

$$\sqrt[3]{\frac{[(5 + \sqrt{3})^3 - 78\sqrt{3}] \times 100}{17}} = 10 \ .$$

VIII. *Verificar a seguinte igualdade:*

$$\frac{1}{2}\,\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\,\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

IX. *Verificar a seguinde igualdate:*

$$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\sqrt{2(\sqrt{3}+1)}$$

X. *Verificar a seguinte igualdade:*

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

LIVRO VI.

Approximações numericas.

—ϱ—

CAPITULO PRIMEIRO.

OPERAÇÕES ABREVIADAS.

Considerações preliminares.

319. As regras das operações sobre os numeros inteiros ou decimaes, que temos demonstrado até aqui, fornecem o resultado *exacto* d'essas operações; porém acontece muitas vezes que não ha necessidade de se obter senão um resultado approximado; então é indispensavel o conhecimento de outros methodos mais rapidos que os ordinarios, por meio dos quaes se possão obter esses valores approximados.

320. Chama-se *erro absoluto* de uma quantidade a differença entre o valor exacto d'essa quantidade e seo valor approximado.

Assim tomando-se 3,27 em lugar de 3,276 commette-se um erro igual a $3{,}276 - 3{,}27 = 0{,}006$. Se em lugar de 4837 toma-se 4800, o erro commettido é 37 unidades.

O erro absoluto é *por excesso* quando o valor approximado que se toma é maior que o valor da quantidade, e *por defeito* no caso contrario.

321. Antes de passarmos ao estudo das operações abreviadas citemos alguns principios, que são de grande importancia, e é mister ter sempre em vista.

PRINCIPIO I. *Logo que á direita de um numero inteiro se substituem zeros a alguns algarismos, o erro commettido é menor que uma unidade de ordem do ultimo algarismo conservado.*

EXEMPLO. Se em lugar do numero 34765 se toma 34700, o erro que se commette é menor que 1 centena; com effeito, $34765 - 34700 = 65$, numero que é menor que 100.

PRINCIPIO II. *Quando em um numero decimal se substituem zeros a alguns algarismos decimaes, o erro commettido é menor que uma unidade de ordem do ultimo algarismo conservado.*

EXEMPLO. Se ao numero 24,6375 se substitue o numero 24,6300 ou 24,63, o erro que se commette é menor que 0,01; com effeito o erro absoluto é $24,6375 - 24,63 = 0,0075$, numero que é menor que 0,01.

Observação. Os dous principios precedentes subsistem ainda, quando se augmenta com uma unidade o ultimo algarismo conservado; porém n'este caso o erro é por excesso. Tomando-se 24,64 por valor approximado do numero 24,6375, commette-se um erro, por excesso, menor que um centesimo.

322. Pode acontecer que o enunciado de uma questão exija que o erro commettido seja menor que meia unidade de ordem do ultimo algarismo conservado.

Ha tres casos a considerar :

I. Se ha um só algarismo que é substituido por zero (á direita do numero) e se este algarismo é 5, o erro commettido é justamente igual a meia unidade de ordem do ultimo algarismo conservado. Assim, se em lugar de 23,45 toma-se 23,4, o erro absoluto é 0,05 ou meio decimo.

II. Se o primeiro á esquerda dos algarismos que são substi-

tuidos por zeros é menor que 5, o erro absoluto é menor que meia unidade de ordem do ultimo algarismo conservado.

Substituindo por exemplo o numero 47,57 ao numero 47,5728, o erro que se commette é menor que meio centesimo; com effeito o erro absoluto é 0,0028, numero que é menor que 0,005, ou meio centesimo.

III. Se o primeiro á esquerda dos algarismos substituidos por zeros é 5, seguido de outros, ou maior que 5, augmenta-se com uma unidade o ultimo algarismo conservado, e o erro que se commette é menor que meia unidade de ordem do ultimo algarismo conservado, porém por excesso. Substituindo-se por exemplo ao numero 74,3478 o numero 74,35 commette-se um erro por excesso menor que meio centesimo.

Em resumo:

Quando o primeiro algarismo supprimido á esquerda é menor que 5, não se toca no ultimo algarismo conservado.

Quando o primeiro algarismo supprimido é igual a 5, seguido de outros, ou maior que 5, é preciso forçar o ultimo algarismo conservado; isto é, augmental-o com uma unidade.

Addição abreviada.

323. REGRA. — *Para obter a somma de muitos numeros inteiros ou decimaes, approximada a certa unidade inteira ou decimal:*

1° *Se não ha mais do que dez numeros a addicionar-se, toma-se cada um d'elles com uma approximação dez vezes maior que a unidade que marca a approximação do resultado; ajuntão-se os numeros, e na somma despreza-se o ultimo algarismo á direita, augmentando-se o precedente com uma unidade.*

2° *Se ha mais de dez numeros e menos de cem, avalia-se cada um d'elles com uma approximação cem vezes menor que a unidade que marca a approximação do resultado, e na somma dos numeros desprezão-se os dous algarismos á direita, augmentando-se o precedente com uma unidade.*

Seja proposto buscar a somma dos numeros 4,32765, 234,7329, 28,467383, 3,14159265, approximada a menos de 0,01.

Applicando-se a regra, dispoem-se os numeros approximados a 0,001, do modo seguinte:

$$\begin{array}{r} 4,\ 327 \\ 234,\ 732 \\ 28,\ 467 \\ 3,\ 141 \\ \hline 270,\ 667 \end{array}$$

Desprezando-se o ultimo algarismo á direita, e augmentando-se o precedente 6 com uma unidade, a somma buscada é 270,67 approximada a 0,01.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA.

Como o erro de cada numero é menor que 0,001, e ha menos de dez numeros, é claro que o erro da somma será menor que $0,001 \times 10 = 0,01$.

Representando S a somma exacta dos numeros propostos, temos

$$S = 270,667 + \alpha$$

α sendo uma quantidade menor que $\frac{1}{100}$, porém

$$270,667 = 270,67 - \beta$$

β sendo tambem uma quantitade menor que $\frac{1}{100}$; logo,

$$S = 270,67 + (\alpha - \beta)$$

Ora $(\alpha - \beta)$ é menor que $\frac{1}{100}$, por conseguinte 270,67 representa a somma pedida approximada a uma quantidade menor que $\frac{1}{100}$ por defeito ou por excesso.

Subtracção abreviada.

314. REGRA. — *Para obter a differença de dous numeros, approximada a uma unidade inteira ou decimal, tomão-se os numeros dados, ambos para mais ou para menos, approximados a uma unidade de mesma ordem que a unidade que marca a approximação, e opera-se a subtracção d'esses numeros.*

Seja proposto buscar a differença dos numeros 24,6328 e 12,98367, approximada a 0,01.

Appliquemos a regra :

$$\begin{array}{r} 24,\ 63 \\ 19,\ 98 \\ \hline 11,\ 65 \end{array}$$

11,65 é a differença pedida, approximada a 0,01 por excesso ou por defeito.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA.

Com effeito, D representando a differença exacta dos numeros propostos, temos

$$D = 11,65 \pm \alpha$$

α sendo uma quantidade que deve ser ajuntada ou diminuida da differença approximada; porém α sendo uma differença de

duas quantidades, cada uma menor que 0,01, será menor que 0,01, logo 11,65 differe da differença exacta em menos de 0,01.

c. q. e. n. d.

Multiplicação abreviada.

325. REGRA D'OUGHTRED. — *Para obter o producto approximado de dous numeros inteiros ou decimaes a menos de uma unidade inteira ou decimal, escreve-se o algarismo das unidades do multiplicador debaixo do algarismo do multiplicando, que representa unidades dez vezes mais fracas que a que marca o grão da approximação pedida; invertem-se os algarismos do multiplicador; multiplica-se todo o multiplicando por cada algarismo do multiplicador, começando-se sempre a operação pelo algarismo do multiplicando que se acha sobre o do multiplicador; escrevem-se os productos uns sob os outros de maneira que os ultimos algarismos á direita, fiquem em linha vertical, e faz-se a somma. Supprime-se o ultimo algarismo á direita, augmentando-se o precedente com uma unidade; o producto assim obtido exprime unidades de mesma ordem que a que marca a approximação.*

Seja proposto determinar o producto dos dous numeros 3,14159, 12,101121, approximado a 0,001.

Eis o typo da operação

$$
\begin{array}{r}
3,14159 \\
121,10121 \\
\hline
3,14159 \\
62830 \\
3141 \\
31 \\
3 \\
\hline
38,0164
\end{array}
$$

Colloca-se o algarismo 2 das unidades do multiplicador debaixo do algarismo 5 dos decimos-millesimos do multiplicando, que exprime unidades dez vezes mais fracas que 0,001; effectuando-se os differentes productos, como se disse, obtem-se por producto 38,0164; desprezando-se o ultimo algarismo e augmentando-se o precedente com uma unidade, o producto approximado a 0,001 será 38,017.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA.

Para provar que 38,017 differe do producto exacto em menos de 0,001, bastará provar que a somma dos erros commettidos é menor que 0,001.

É facil vêr-se que os differentes productos parciaes exprimem todos unidades de mesma ordem, decimos-millesimos; é por esta razão que são escriptos, como manda a regra.

Em cada multiplicação parcial desprezarão-se sempre os algarismos do multiplicando á direita d'aquelle pelo qual se devia começar a operação; o numero formado por aquelles algarismos é menor que uma unidade da ordem d'este, logo o erro do producto parcial é menor que um decimo-millesimo multiplicado pelo algarismo correspondente do multiplicador, e por conseguinte o erro commettido sobre a somma dos productos parciaes é menor que $0,0001 \times (1+2+1+1+1)$ ou 0,0006. Tambem não fez-se caso dos dous ultimos algarismos á esquerda no multiplicador, que formão um numero menor que uma unidade do algarismo seguinte 1, que se acha debaixo do algarismo 3 do multiplicando, e como o multiplicando é menor que $(3+1)$ unidades, por conseguinte o erro que se commette, desprezando-se aquella parte do multiplicador é menor que $0,0001 \times (3+1)$; isto é, menor que 0,0004.

A somma dos erros é pois menor que $0,0006 + 0,0004$; isto é, menor que 0,001; por conseguinte o producto exacto dos dous numeros propostos é maior que 38,0164 e menor que

38,0164 + 0,001 = 38,0174; com maior razão o producto se acha comprehendido entre 38,016 e 38,018; logo, 38,017 que differe de cada um d'estes numeros em 0,001, differirá do producto exacto em menos de 0,001, o que se queria demonstrar.

Observação. A regra que se acabou de demonstrar, só convem aos dous casos seguintes, o que resulta dos raciocinios que se fizerão precedentemente:

I. Se todos os algarismos do multiplicador fôrem empregados, quando sua somma fôr menor que 10.

II. Se todos os algarismos do multiplicador não fôrem empregados, quando a somma dos algarismos empregados mais o algarismo á esquerda no multiplicando augmentado com uma unidade formarem um numero menor que 10.

Se a somma dos algarismos empregados do multiplicador é maior que 10 e menor que 100, o que acontece quasi sempre, a regra acima soffre uma alteração. Eis em que consiste essa modificação.

Em lugar de escrever-se o algarismo das unidades do multiplicador debaixo do algarismo do multiplicando que exprime unidades dez vezes mais fracas, que a que marca o gráo da approximação, colloca-se o dito algarismo sob o algarismo do multiplicando que exprime unidades cem vezes mais fracas; opera-se depois como manda o primeira regra, e á direita do producto obtido omittem-se os dous ultimos algarismos, augmentando-se o precedente com uma unidade.

Em virtude de tudo quanto se tem dito, comprehende-se facilmente como se deveria modificar a regra, se a somma dos algarismos empregados do multiplicador fosse maior que 100, e menor que 1000.

A demonstração da regra modificada é identica á primeira; deixamol-a ao leitor, dando no entretanto outro exemplo para mais clareza.

Determinar o producto de 3,14159265 *por* 2,7182818 *á* 0,001 *proximo.*

Applicando a regra, temos:

```
   3,14159265
 818,28172
 ----------
   6 28318
   2 19905
      3141
      2512
        62
        24
 ----------
   8,53962
```

Desprezando-se os dous ultimos algarismos, e augmentando-se o precedente com uma unidade, o producto buscado, approximado a 0,001, é 8,540.

Ordinariamente na pratica só se escrevem os algarismos necessarios.

Divisão abreviada.

326. REGRA. — *Para achar o quociente da divisão de dous numeros inteiros ou decimaes, approximado a uma unidade, determina-se em primeiro lugar o numero* n *de algarismos que deve ter o quociente; toma-se depois* (n + 2) *algarismos no divisor (a partir da esquerda), e no dividendo tantos quantos bastem para formar o menor numero possivel que contenha o divisor. Posto isto, obtem-se os algarismos do quociente dividindo o dividendo assim modificado pelo novo divisor, o resto d'esta divisão pelo divisor precedente privado do seo ultimo algarismo á direita, o resto d'esta outra pelo divisor precedente privado do seo ultimo algarismo á direita, etc.; continua-se d'esta maneira até ter considerado todos os algarismos do quociente.*

Seja proposto determinar o quociente da divisão do numero

46732,4873763 por 6,249074327, approximado a uma unidade.

Appliquemos a regra precedente; o algarismo das mais altas unidades do quociente exprimindo unidades de mil, este terá quatro algarismos. Tomando-se 4 + 2 ou 6 algarismos no divisor, este torna-se 624907,4327 ou 100000 vezes maior que o divisor dado; multiplicando-se o dividendo dado por 100000 é claro que o quociente da divisão dos numeros propostos é o mesmo que o da divisão de 4673248737,63 por 624907,4327 (nº 85). Tomemos n'este dividendo o numero 4673248 que contem menos de dez vezes o divisor inteiro 624907, e dividamos o primeiro pelo segundo, conforme a regra;

4673248	737,63	624907,4327
298899		7478
48939		
5196		
204		

7478 é o quociente pedido, approximado a uma unidade.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA.

O resto da divisão 204 é a differença entre o primeiro dividendo parcial e o producto abreviado do divisor pelo quociente, o que pode-se ver directamente; com effeito o primeiro dividendo parcial 4673248 exprime unidades de mil, e os differentes productos parciaes da multiplicação abreviada do divisor pelo quociente 7478 exprimem tambem unidades de mil; effectuemos esta multiplicação

```
 624907,4327
       8747
 -----------
  4374349
   249960
    43743
     4992
 -----------
  4673044
```

Ajuntando ao producto abreviado 4673044 mil os 204 mil do resto temos por somma 4673248 mil, que é justamente o primeiro dividendo parcial.

Assim

$$4673248000 = \underline{624907,4327 \times 7478} + 204000,$$

o *traço* indicando o producto abreviado dos dous factores.

Ajuntando aos dous membros da igualdade supra uma mesma quantidade 737,63, temos :

$$4673248737,63 = \underline{624907,4327 \times 7478} + 204737,63.$$

Substituindo ao producto abreviado o producto exacto, o segundo membro cresce em uma quantidade que é justamente igual ao erro do producto abreviado, que chamamos e; logo, diminuindo o segundo membro de e, temos

$$4673248737,63 = 624907,4327 \times 7478 + 204737,63 - e.$$

Se demonstramos que cada uma das quantidades, 204737,63 e e é menor que o divisor, 7498 será o quociente approximado a uma unidade. Ora 204 é o resto da divisão parcial, onde o divisor 625 exprime unidades de mesma ordem ; logo,

$$204 < 624$$

e *a fortiori*

$$204737{,}63 < 624907{,}4327\,;$$

pela multiplicação abreviada se sabe que e é menor que 100 mil, porém o divisor contem 624 mil, logo e é menor que o divisor.

Cada uma das quantidades, *o resto*, e o *erro* sendo menor que o divisor, a differença será ainda muito menor; logo, 7478 representa o quociente approximado a uma unidade.

Observação I. Se o quociente deve ter n algarismos, toma-se $(n+2)$ no divisor a fim de que o ultimo divisor empregado tenha tres e seja ao menos igual a 100 (1), limite do erro do producto abreviado. É claro que se aquelle limite fosse maior que 100, e menor que 1000 seria necessario tomar tres algarismos de mais no divisor em vez de dous.

Observação II. O quociente será approximado por excesso ou por defeito se o resto fôr menor, ou maior que o erro do producto abreviado. Se o resto é maior que 100, o quociente é approximado por defeito; porém se é menor que o limite do erro do producto abreviado, não se pode conhecer, se é por excesso ou por defeito.

Observação III. Se no divisor os primeiros algarismos são zeros, contão-se os $(n+2)$ algarismos a partir do primeiro algarismo significativo á esquerda.

Observação IV. Pode acontecer que um resto contenha dez vezes o divisor; a partir d'ahi os algarismos restantes do quociente são todos *nove*, e o quociente é approximado por defeito.

Em lugar de operar assim, pode-se augmentar o algarismo precedente com uma unidade e completar por meio de zeros o quociente, que n'este caso é approximado por excesso.

Observação V. Determina-se o quociente da divisão de dous

(1) É claro que 100 exprime unidades de ordem do algarismo á direita do ultimo divisor empregado.

numeros dados, approximado a uma unidade decimal, por exemplo a 0,001, multiplicando-se o dividendo por 1000, e buscando-se o quociente approximado a uma unidade, como manda a regra (nº 326).

Extracção abreviada da raiz quadrada de um numero inteiro.

327. Sabe-se pelo que se disse na theoria da raiz quadrada que a extracção da raiz quadrada de um numero inteiro ou decimal, approximada a uma unidade decimal, reduz-se sempre á extracção da raiz quadrada de um numero inteiro, approximado a uma unidade.

Theorema. *Quando na extracção da raiz quadrada de um numero inteiro tem-se obtido mais de metade dos algarismos da raiz ou somente a metade, se o primeiro é 5 ou maior que 5, pode-se obter os outros, dividindo o resto pelo dobro da raiz.*

Seja A o numero dado, a a parte achada da raiz com seo valor relativo, x o numero ordinariamente incommensuravel que é necessario ajuntar a a para formar $\sqrt{A}$, e R o resto logo que se tem subtrahido a^2 de A. Ora A differindo de $(a+x)^2$ em uma quantidade infinitamente pequena podemos pôr :

$$A=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2;$$

subtrahindo a^2 de um e outro lado, temos :

$$A-a^2=R=2ax+x^2;$$

d'onde deduz-se :

$$2ax=R-x^2,$$

em seguida

$$x = \frac{R}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Se n designa o numero dos algarismos desconhecidos da raiz é claro que

$$x < 10^n,$$

em seguida

$$x^2 < 10^{2n};$$

de outro lado a tem por hypothese quando menos $2n + 1$ algarismos, ou $2n$ se o primeiro algarismo é igual ou superior a 5, de maneira que ter-se-ha sempre

$$2a > 10^{2u};$$

por esta duplice razão

$$\frac{x^2}{2a} < 1 \quad .$$

Assim desprezando-se a fracção $\frac{x^2}{2a}$, o quociente completo $\frac{R}{2a}$ será o valor de x por excesso, approximado a uma unidade; tomando-se somente a parte inteira d'aquelle quociente o valor de x será approximado a uma unidade por excesso ou por defeito.

Seja proposto, por exemplo, extrahir a raiz quadrada de 3141592653589, approximada a uma unidade.

Eis o typo da operação :

3.14.15.92.65.35.89	1772452
2 14	27 | 347 | 3542
25 15	
86 92	

16 08 65 3 5 89	3544000
1 87 05	4 5 2
9 35 3	
2 24 5	

A raiz do numero proposto devendo ter *sete* algarismos, calculão-se *quatro* pelo methodo ordinario ; esses quatro algarismos sendo 1772, a primeira parte da raiz que no raciocinio supra chamou-se a é 1772000, e o resto correspondente 1608653589 ; divide-se esse resto pelo dobro da parte achada na raiz, isto é, por 3544000 ; ou 1608653 por 3544 (nº 68) ; o quociente 452 é a parte complementaria da raiz ; assim, a raiz pedida é 1772452, approximada a uma unidade.

Extracção abreviada da raiz cubica de um numero inteiro.

328. THEOREMA. *Quando na extracção da raiz cubica de um numero inteiro se tem obtido mais da metade dos algarismos da raiz, pode-se obter os outros, dividindo-se o resto por tres vezes o quadrado da parte achada.*

Seja A o numero inteiro dado, a a parte achada na raiz, n o numero dos algarismos da raiz, x o numero ordinariamente incommensuravel que é necessario ajuntar a a para obter-se $\sqrt[3]{A}$.

Podemos pôr sem erro sensivel :

$$A=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3;$$

subtrahindo de um e outro lado a^3, temos

$$R = A - a^3 = 3\,a^2\,x + 3\,ax^2 + x^3,$$

R representando o resto da operação; dividindo a igualdade supra por $3\,a^2$, temos:

$$\frac{R}{3\,a^2} = x + \frac{3\,ax^2 + x^3}{3\,a^2},$$

d'onde se deduz:

$$x = \frac{R}{3\,a^2} - \frac{x^2}{3\,a}\left(3 + \frac{x}{a}\right);$$

Sendo n o numero dos algarismos da raiz, o numero dos algarismos achados na raiz pelo methodo ordinario é quando menos $\frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$, por conseguinte x contem quando muito $n - \frac{n+2}{2}$, isto é $\frac{n-2}{2}$; é claro que

$$x < 10^{\frac{n-2}{2}} \text{ e } a > 10^{n-1};$$

em seguida

$$x^2 < 10^{n-2},\ 3\,a > 3.10^{n-1};$$

por esta duplice razão:

$$\frac{x^2}{3\,a} < \frac{10^{n-2}}{3.10^{n-1}} = \frac{1}{30}$$

De outro lado x sendo menor que a

$$\frac{x}{a} < 1, \text{ em seguida } 3 + \frac{x}{a} < 4$$

logo

$$\frac{x^2}{3a}\left(3+\frac{x}{a}\right) < \frac{1}{30} \times 4 = \frac{2}{15}$$

Assim o quociente completo $\frac{R}{3a^2}$ dará o valor de x, approximado á $\frac{2}{15}$ por excesso; tomando-se porém somente a parte inteira d'aquelle quociente, obter-se-ha x, approximado a uma unidade por excesso ou por defeito; como applicação proponhamo-nos a extrahir a raiz cubica do numero

4 3 2 9 4 6 7 8 2 3 5 4 6 2 3 9 6 4 2 3

approximada a uma unidade.

Eis o typo da operação :

43.294.678.235.462.396.423	3511
27	162 | $3.3^2 = 27$ / 5
162.94	$(35)^3 = 42875$
428 75	4196 | $3.35^2 = 3675$ / 1
4 19 6.78	$(351)^3 = 43243551$
432 43 5 51	511272 | $3.351^2 = 36960$ / 1
51 1 27 235	$(3511)^3 = 43280519831$
432 80 5 19 831	
14 1 58 404	
R = 1 4 1 5 8 4 0 4 4 6 2 3 9 6 4 2 3	

$a = 3511000$

$3a^2 = 3(3511000)^2 = 36981361000000$

$$x = \frac{R}{3a^2} = \frac{141584044623396423}{35981361000000}$$

141584 | 04462396423	36981 | 361000000
30641	382
1057	
319	

$$x = 382$$
$$\sqrt{A} = a + x = 3511000 + 382 = 3511382.$$

Os quatro primeiros algarismos da raiz, 3511, fôrão determinados pelo methodo ordinario; os tres ultimos, como manda a regra (que acima demonstrámos), dividindo-se R por $3a^2$, e calculando-se o quociente a menos de uma unidade, para o que empregámos o methodo da divisão abreviada (nº 326).

EXERCICIOS.

I. *Calcular a menos de* 0,01

$$467,3256 + 0,4326 + 3,00567 + 15,07432678.$$

II. *Calcular a menos de* 0,001

$$567,67087 - 5,6073296.$$

III. *Calcular a menos de uma unidade*

$$22674,832 \times 467,52356.$$

IV. *Determinar a menos de* 0,0001 *o producto seguinte*

$$0,0432763 \times 0,6075367.$$

V. *Determinar, a menos de uma unidade, o quociente seguinte*

$$\frac{14158404462396423}{36981361000000}$$

VI. *Calcular, a menos de* 0,001 *o quociente seguinte*

$$\frac{4672,3258748}{32,567279}$$

VII. *Calcular a menos de* 0,1 *o quociente da divisão dos dous numeros :* 367,253468, 0,0037526.

VIII. *Calcular a menos de uma unidade*

$$\sqrt{6743090532093467}.$$

IX. *Calcular a menos de uma unidade*

$$\sqrt[3]{2530008000 7854972}.$$

X. *O anno tropico consta de* 365,24226 *dias solares medios, e o anno sideral de* 365,25638 ; *determinar esses annos em dias sideraes, a menos de* 0,001, *sabendo-se que o dia solar medio equivale a* 1,00273908 *dia sideral.*

CAPITULO II.

ERROS ABSOLUTOS.

Considerações preliminares.

329. No capitulo precedente expômos os methodos abreviados para se effectuarem as differentes operações da Arithmetica sobre numeros exactos, porém na maior parte das questões, que se appresentão na pratica, as quantidades que se considerão não são conhecidas senão approximadamente.

Os instrumentos empregados nas sciencias d'observação não sendo perfeitos, os numeros que resultão das diversas experiencias não são exactos, e como depois são submettidos ao calculo, segue-se que o resultado das operações ao qual se chega, é tambem inexacto. Alem disso podem entrar no calculo outras quantidades como raizes incommensuraveis, π (razão da circumferencia ao diametro), etc., quantidades, cujos valores só podem ser obtidos de uma maneira approximada, de modo que duas questões principaes se appresentão n'esta theoria importante da Arithmetica :

I. *Conhecendo-se o gráo d'approximação de cada dado de uma questão, determinar o gráo d'approximação do resultado.*

II. *Determinar o gráo d'approximação com que se deve calcular cada dado de uma questão, para que o resultado seja obtido com uma approximação desejada.*

Eis um principio de grande importancia n'esta theoria.

330. Principio. *Se uma quantidade é muita pequena, em um calculo d'approximações pode-se desprezar o quadrado, o cubo, e as potencias superiores d'aquella quantidade.*

Porque isso significa desprezar uma quantidade muito pequena relativamente a outras maiores.

Antes de tratarmos questão alguma façamos conhecer a significação das lettras de que nos serviremos n'este capitulo. As lettras A, B, C.... designarão quantidadas exactas; $a, b, c, \ldots$ valores approximados d'aquellas quantidades; $\alpha, \beta, \lambda \ldots$ erros absolutos commettidos sobre aquelles valores, e **E** o erro absoluto commettido sobre o resultado de uma ou muitas operações.

Addição.

331. Primeira questão. — *Tomando-se* a, b, c ..... *em lugar de* A, B, C ..... a, b, c ..... *commettem-se os erros respectivos* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; *suppondo-se esses erros no mesmo sentido, por exemplo, todos por defeito, pergunta-se o erro commettido sobre a somma.*

Temos por hypothese:

$$A = a + \alpha$$
$$B = b + \beta$$
$$C = c + \lambda$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots;$$

sommando membro a membro essas igualdades,

$$A + B + C + \ldots = a + b + c + \ldots + \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

e em virtude da definição (nº 320)

$$E = A + B + C + \ldots - (a + b + c + \ldots) = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

Assim, *quando os erros teem lugar no mesmo sentido, o erro*

commettido sobre a somma é igual á somma dos erros (1).

Observação. Se os erros commettidos sobre os numeros são uns por excesso, e outros por defeito, vê-se facilmente pela igualdade supra que o erro commettido sobre a somma é menor que a somma dos erros.

EXEMPLO. *Seja proposto addicionar os seguintes numeros,*

$$\begin{array}{r} 4,3276 \\ 8,2065 \\ 3,7943 \\ 6,7280 \\ \hline 23,0564 \end{array}$$

approximados por defeito cada um a uma unidade de ordem do seo ultimo algarismo ; isto é, a menos de um decimo-millesimo.

A somma será tambem approximada para menos, e o erro commettido sobre ella é menor que 4 decimos-millesimos; assim a verdadeira somma é comprehendida entre 23,0564 e 23,0568 ; desprezando-se o ultimo algarismo, como inexacto, tem-se por valor da somma o numero 23,057, approximado a meia unidade da ordem dos millesimos.

SEGUNDA QUESTÃO.— *Determinar o grão d'approximação com que deve-se tomar cada numero* a, b, c,..... *para que a somma seja obtida com uma approximação desejada* **E**.

Esta questão ja foi tratada no nº 323.

(1) Ordinariamente na pratica não se conhecem os erros absolutos, commettidos sobre os numeros, porém limites superiores d'esses erros, de sorte que na addição, por exemplo, α, β, γ ...... são limites superiores dos erros commettidos sobre a, b, c . .... ; então E, erro da somma, é menor que a somma dos erros, e não igual.

Subtracção.

332. PRIMEIRA QUESTÃO. — I. *Se os erros são de mesmo sentido, por exemplo por defeito, temos :*

$$\begin{array}{r} A = a + \alpha \\ B = b + \beta \\ \hline \end{array}$$

e
$$A - B = a - b + \alpha - \beta\ ;$$

d'onde se deduz :

$$E = (A - B) - (a - b) = \alpha - \beta.$$

Assim, *o erro da differença é igual á differença dos erros, quando são de mesmo sentido.*

II. *Se os erros são de sentido opposto, o minuendo por exemplo por defeito, e o subtrahendo por excesso temos :*

$$\begin{array}{r} A = a + \alpha \\ B = b - \beta \\ \hline \end{array}$$

e
$$A - B = a - b + \alpha + \beta\ ;$$

d'onde se deduz :

$$E = (A - B) - (a - b) = \alpha + \beta.$$

Assim, *o erro da differença iguala á somma dos erros, quando são de mesmo sentido.*

EXEMPLO I. *Calcular a differença dos dous numeros* 24,338 *e* 12,492, *approximados cada um a uma unidade do ultimo algarismo, o primeiro por defeito, o segundo por excesso.*

Subtrahindo, temos :

$$\begin{array}{r} 24,338 \\ 12,492 \\ \hline 11,846 \end{array}$$

O minuendo é muito fraco, e o subtrahendo muito forte; por esta duplice razão a differença é muita fraca, porém o erro da differença é 2 millesimos, por conseguinte a verdadeira differença é comprehendida entre 11,846, e 11,848 ; como o ultimo algarismo é inexacto, tomaremos por valor da differença 11,85, numero approximado a meio centesimo por excesso.

Acontece muitas vezes que não se conhece o sentido do erro, então deve-se sempre tomar o caso mais desfavoravel, como vamos ver no seguinte exemplo.

Exemplo II. *Diminuir* 2,958 *de* 4,683, *numeros approximados a um millesimo.*

Operando, temos :

$$\begin{array}{r} 4,683 \\ 2,958 \\ \hline 1,725 \end{array}$$

Tomando o caso mais desfavoravel, o erro da differença é 2 millesimos, por conseguinte a verdadeira differença acha-se comprehendida entre 1,723, e 1,727 ; 1,72 será a differença buscada, approximada a um centesimo por defeito.

Segunda questão. — *Qual o erro que se deve commetter sobre* a, *e* b, *para que o erro da differença seja menor que uma quantidade dada* E.

Esta questão ja foi tratada no nº 324.

Multiplicação.

333. Primeira questão. — I. *Um dos factores, por exemplo*

o multiplicando, sendo approximado a uma quantidade α, *e o outro factor exacto, qual o erro commettido sobre o producto?*

Multiplicando por B a igualdade

$$A = a + \alpha$$

temos :

$$A \times B = a \times B + \alpha \times B;$$

d'onde se deduz :

$$E = A \times B - a \times B = \alpha \times B.$$

Assim, *o erro do producto é igual ao producto do erro do factor approximado pelo factor exacto.*

II. *Ambos os factores são approximados a* α, *e* β, *qual o erro do producto?*

Multiplicando as igualdades seguintes membro a membro,

$$A = a + \alpha$$
$$B = b + \beta$$

temos :

$$A \times B = a \times b + b \times \alpha + a \times \beta + \alpha \times \beta;$$

d'onde se deduz :

$$E = A \times B - a \times b = b \times \alpha + a \times \beta + \alpha \times \beta;$$

o producto $\alpha \times \beta$ podendo ser desprezado, porisso que α, e β são quantidades ordinariamente muito pequenas (nº 330), pode-se tomar sem inconveniente,

$$E = b \times \alpha + a \times \beta.$$

Assim, *o erro do producto iguala á somma dos productos que se obtem, multiplicando-se cada factor pelo erro do outro.*

Observação. Se os erros são de sentido contrario o erro do producto torna-se menor, por isso que então $\mathbb{E} = b \times \alpha - a \times \epsilon$.

Exemplo I. *Seja proposto multiplicar* 2,71828, *approximado a* 0,00001, *por* 13,483073, *numero exacto.*

O multiplicador sendo menor que 20, o erro do producto é menor que $0,00001 \times 20 = 0,0002$, por conseguinte menor que 0,001. Calcular-se-ha o producto com tres algarismos decimaes.

Empregando-se a regra d'Oughtred acha-se que 36,651 é o producto pedido approximado a 0,001.

Exemplo II. *Calcular o producto dos dous numeros* 67,48604, 21,46743, *approximados por defeito a menos de* 0,00001.

A fim de diminuir o erro do producto tomaremos o multiplicador por excesso ; o erro do multiplicando causa no producto um erro menor que 70 centesimos-millesimos, ou 7 decimos-millesimos, e o do multiplicador um erro menor que 30 centesimos-millesimos, ou 3 decimos-millesimos, porém esses erros sendo de sentido opposto, é claro que o erro do producto será menor que o maior d'esses erros; isto é, menor que 7 decimos-millesimos, e *a fortiori* menor que 1 millesimo. Calcular-se-ha o producto com tres algarismos decimaes. Applicando-se a regra d'Oughtred acha-se que 99,031 é o producto, approximado a menos de 0,001.

334. Segunda questão. — I. *Qual o grão d'approximação com que deve-se calcular* a *para que erro do producto seja menor que* $\mathbb{E}$.

O factor B sendo exacto, e α sendo o erro desconhecido, bastará pôr

$$\alpha \times B < \mathbb{E},$$

d'onde se deduz :

$$\alpha < \frac{\mathbb{E}}{B}$$

Assim, *o erro do factor deve ser menor que o quociente do erro do producto divido pelo factor exacto.*

II. *Os dous factores sendo approximados, qual o grão d'approximação com que deve-se calcular cada um d'elles para que o limite do erro do producto seja menor que* E.

Em virtude da primeira questão, α e β sendo os erros desconhecidos, bastará escrever:

$$b\times\alpha+a\times\beta<\mathrm{E};$$

poder-se-ha sempre tomar α assaz pequeno de modo que $b\times\alpha$ seja menor que E, e depois determinar β de tal maneira que o producto $a\times\beta$ junto á $b\times\alpha$ faça uma somma menor que E.

EXEMPLO I. *Calcular a um decimetro quadrado proximo a superficie de um circulo, cujo raio é igual a* 1,30.

A Geometria fornece a seguinte formula

$$S=\pi\times R^2,$$

onde S representa a superficie do circulo, π a razão da circumferencia ao diametro, numero que é igual á 3,14159265.... e R o raio do circulo.

Calcular a superficie do circulo a menos de um decimetro quadrado é o mesmo que calcular o producto $\pi\times R^2$ a menos de um centesimo, para o que deve-se tomar

$$\alpha<\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}},\ \text{isto é},\ \alpha<\frac{0{,}01}{(1{,}30)^2}=\frac{1}{169}<0{,}01\ ;$$

tomando por conseguinte π com dous algarismos decimaes, temos:

$$S=3{,}14\times1{,}69=5{,}3066\ ;$$

a superficie buscada é 5,31, approximada a menos de um centimetro quadrado.

EXEMPLO II. *Calcular a menos de um millimetro a circumferencia do circulo circumscripto a um quadrado, cujo lado é igual á um metro.*

Sabe-se pela Geometria que o raio d'esse circulo é igual a $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, e se C designa a circumferencia, tem-se

$$C = \pi \times \sqrt{2}$$

Trata-se de calcular um producto de dous factores approximados á 0,001 proximo; tomando-se os erros

$$\alpha < 0{,}0001, \text{ e } \beta < 0{,}0001$$

e em sentidos oppostos, é claro que se terá

$$b \times \alpha + a \times \beta < 0{,}001$$

por isso que cada um dos factores incommensuraveis $\sqrt{2}$, e π é menor que 10; tomar-se-ha por conseguinte

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \quad \pi = 3{,}1416.$$

Empregando-se a regra d'Oughtred, acha-se que o comprimento da circumferencia é 4,443, approximado a 0,001.

PRODUCTO DE MUITOS FACTORES.

335. Suppondo

$$A = a + \alpha, B = b + \beta, C = c + \gamma, D = d + \delta,$$

qual o erro que se commette tomando-se em lugar do producto exacto A . B . C . D, *o producto approximado* a. b. c. .

Se um factor somente fosse approximado, por exemplo A, e os outros exactos, o erro do producto tomando-se em lugar de A. B. C. D, o producto approximado a. B. C. D seria

$$(a+\alpha). B. C. D. - a. B. C. D. = a. B. C. D. + \alpha. B. C. D. - \\ - a. B. C. D. = \alpha. B. C. D,$$

isto é, *igual ao erro do factor multiplicado pelo producto dos*

outros factores, isto quer dizer que o producto exacto diminue de α. B. C. D.

Será facil ver-se que mudando B em b no producto a. B. C. D, este diminue de um numero menor que β. a. C. D, ou melhor ainda de um numero menor que β. A. C. D, e assim até o ultimo ; de sorte que tomando a. b. c. d. em lugar de A. B. C. D, este producto diminue de uma quantidade menor que

$$\alpha. B. C. D. + \beta. A. C. D. + \gamma. A. B. D. + \delta. A. B. C.$$

Assim, o erro commettido em um producto de muitos factores, approximados por defeito, é menor que a somma que se obtem multiplicando-se o limite do erro de cada factor pelo producto de todos os outros.

Observação I. Como a maior parte das vezes os factores não são conhecidos exactamente, para calcular-se o erro do producto tomão-se aquelles, approximados por excesso.

Observação II. Se todos os factores são approximados a uma mesma quantidade α, o erro do producto E é menor que

$$\alpha \times (b'. c'. d'. + a'. c'. d'. + a'. b'. d'. + a'. c'. b'.)$$

a', b', c', d', designando os valores de A, B, C, D, approximados por excesso.

Quadrado.

336. PRIMEIRA QUESTÃO. — *Sendo* α *o erro commettido sobre um numero approximado* a, *qual o erro sobre o quadrado d'esse numero?*

Elevando ao quadrado a igualdade

$$A = a + \alpha$$

temos :

$$A^2 = a^2 + 2 \times a \times \alpha + \alpha^2$$

d'onde se deduz :

$$E = A^2 - a^2 = 2 \times a \times \alpha + \alpha^2 ;$$

desprezando α^2 (nº 330), temos :

$$E = 2 \times a \times \alpha .$$

Assim, *o erro sobre o quadrado de um numero, approximado, é igual ao erro sobre o numero multiplicado por duas vezes esse numero.*

EXEMPLO. *Calcular a superficie do circulo, cujo raio approximado a um centimetro é* 3,52.

A superficie S de um circulo é dada pela formula seguinte :

$$S = \pi \times R^2 .$$

O erro sobre o quadrado R^2 é menor que $2 \times 4 \times 0,01$ ou 0,08, e *a fortiori* menor que 0,1 ; o da superficie será menor que $0,1 \times \pi$, isto é, menor que 0,4 ; ter-se-ha pois a superficie a menos de um metro quadrado. Effectuando-se os calculos acha-se $R^2 = 12,4$, e $S = 39^{m.q.}$ a menos de um metro quadrado.

337. SEGUNDA QUESTÃO. — *Qual o gráo d'approximação com que deve-se tomar um numero approximado* a *para que o erro sobre seo quadrado seja menor que uma unidade dada* E.

O erro do quadrado sendo $2 \times a \times \alpha$, bastará pôr :

$$2 \times a \times \alpha < E ,$$

d'onde se deduz :

$$\alpha < \frac{E}{2 \times a} .$$

Assim , *o erro sobre o numero approximado deve ser menor*

que o quociente da divisão do erro sobre o quadrado pelo dobro d'esse numero.

Cubo.

338. Primeira questão. — *Tomando-se* a *em lugar de* A *commette-se um erro* α, *qual o erro commettido tomando-se* a^3 *em lugar de* A^3.

Elevando ao cubo a igualdade

$$A = a \times \alpha,$$

temos:

$$A^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times \alpha + 3 \times a \times \alpha^2 + \alpha^3,$$

d'onde se deduz:

$$E = A^3 - a^3 = 3 \times a^2 \times \alpha + 3 \times a \times \alpha^2 + \alpha^3;$$

desprezando-se $3 \times a \times \alpha^2$ e α^3 que são quantidades muito pequenas relativamente ás outras, pode-se pôr sem erro sensivel:

$$E = 3 \times a^2 \times \alpha,$$

Assim, *o erro sobre o cubo de um numero, approximado, é igual ao erro sobre o numero multiplicado por tres vezes o seo quadrado.*

339. Segunda questão. — *Qual o erro que se deve commetter sobre o numero approximado* a, *para que o cubo seja obtido com uma approximação desejada* E.

O erro sobre o cubo sendo $3 \times a^2 \times \alpha$, bastará pôr

$$3 \times a^2 \times \alpha < E,$$

d'onde se deduz :

$$\alpha < \frac{E}{3 \times a^2}$$

Assim, *o limite do erro sobre o numero approximado deve ser menor que o quociente da divisão do limite do erro sobre o cubo por tres vezes o quadrado do numero approximado.*

Potencia de gráo m.

340. PRIMEIRA QUESTÃO. — *Sendo* α *o erro commettido sobre um numero approximado* a, *qual o erro commettido sobre a potencia* a^m.

Como a^m é um producto de m factores iguaes a a, é claro (nº 335) que

$$E = \alpha . m . a^{m-1}$$

Assim, *o erro commettido sobre a potencia de gráo* m *é menor que o erro commettido sobre o numero multiplicado por* m *vezes a potencia de gráo* m — 1.

SEGUNDA QUESTÃO. — *Qual o gráo d'approximação com que deve-se tomar* a *para que o erro sobre* a^m *sejà menor que* E.

Acabámos de ver que o erro commettido sobre a^m é $\alpha . m . a^{m-1}$, sendo α o limite do erro commettido sobre a, logo satisfaremos *a fortiori* á questão, pondo :

$$\alpha . m . a^{m-1} < E, \quad \text{d'onde } \alpha < \frac{E}{m . a^{m-1}}$$

Assim, *o erro commettido sobre o numero deve ser menor que o limite do erro que se quer commetter sobre a potencia dividido*

por m *vezes a potencia de gráo* m — 1 *do mesmo numero approximado.*

Divisão.

341. PRIMEIRA QUESTÃO. — I. *O dividendo sendo approximado, e o divisor exacto.*

Dividindo a igualdade $A = a + \alpha$ pelo divisor exacto B, temos

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{B} + \frac{\alpha}{B}$$

d'onde se deduz

$$E = \frac{A}{B} - \frac{a}{B} = \frac{\alpha}{B}$$

Assim, *o erro do quociente de um numero approximado por um numero exacto, é igual ao erro do dividendo dividido pelo divisor.*

II. *O dividendo sendo exacto, e o divisor approximado.* O erro do quociente será

$$E = \frac{A}{b} - \frac{A}{b + \beta} = \frac{A \times \beta}{b(b + \beta)};$$

a quantidade β sendo muito pequena relativamente a b no denominador, pode ser desprezada de modo que a expressão do erro torna-se :

$$E = \frac{A \times \beta}{b^2}.$$

Assim, *o erro do quociente de um numero exacto por um numero approximado é igual ao erro do divisor multiplicado pelo dividendo, e dividido pelo quadrado do divisor.*

19

III. *O dividendo e o divisor sendo numeros approximados.*

Tomando o caso mais desfavoravel, em que os erros são de sentidos contrarios, temos :

$$E = \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha}{b - \beta} - \frac{a}{b} = \frac{b \times \alpha + a\beta}{b(b - \beta)},$$

e desprezando β no denominador

$$E = \frac{b \times \alpha + a \times \beta}{b^2} = \frac{\alpha}{b} + \frac{a\beta}{b^2}$$

Assim, *o erro do quociente de dous numeros approximados é igual á somma dos dous erros parciaes.*

Exemplo I. *Dividir* 2346780,94327 *approximado a* 0,01 *pelo numero exacto* 4,276325783.

O erro do quociente é menor que $\frac{0,01}{4,276325783}$ e em decimaes menor que 0,003 ou melhor ainda menor que 0,01. Ter-se-ha pois o quociente com dous algarismos decimaes.

Exemplo II. *Dividir o numero exacto* 43,729 *pelo numero* 6,287, *approximado a* 0,001.

O dividendo sendo menor que 44, o divisor maior que 6, o erro do quociente será menor que $\frac{44 \times 0,001}{36}$ ou menor que 0,002, ou melhor ainda menor que 0,01. O quociente terá dous algarismos decimaes exactos.

Empregando-se o methodo da divisão abreviada, acha-se o quociente 695,54, approximado a menos de 0,01.

Exemplo III. *Dividir* 3,467 *approximado a* 0,001 *por* 14,37 *aproximado a* 0,01.

O erro proveniente do dividendo é menor que $\frac{0,001}{14}$, ou menor que 0,0001; o erro proveniente do divisor é menor que

$\frac{4 \times 0,01}{196}$ ou menor que 0,0003; por conseguinte, o erro commettido sobre o quociente é menor que o $0,0001 + 0,0003 = = 0,0004$, ou melhor ainda menor que 0,001. Ter-se-ha o quociente com tres algarismos decimaes exactos.

Applicando-se o methodo da divisão abreviada, acha-se que o quociente pedido é 0,241.

342. Segunda questão. I. *Qual o erro que se deve commetter sobre o dividendo* a, *para que o erro do quociente pelo divisor exacto B seja menor que* E.

Sendo α o erro desconhecido é claro que bastará pôr:

$$\frac{\alpha}{B} < E,$$

d'onde se deduz:

$$\alpha < E \times B.$$

Assim, *o erro que se deve commetter sobre o dividendo deve ser menor que o producto do limite do erro do quociente multiplicado pelo divisor.*

II. *Qual o gráo d'approximação com que se deve calcular o divisor* b, *para que o erro do quociente de A, numero exacto, por aquelle divisor seja menor que* E.

Sabemos que o erro commettido sobre o quociente é menor que $\frac{A \times \beta}{b^2}$, pondo:

$$\frac{A \times \beta}{b^2} < E$$

satisfaremos *a fortiori* á questão; deduz-se d'alli

$$\beta < \frac{E \times b^2}{A} = E \times \frac{b^2}{A}.$$

Assim, *o erro do divisor deve ser menor que o erro do quo-*

ciente multiplicado pelo quadrado do divisor, approximado por defeito, dividido pelo dividendo exacto.

III. *Com que gráo d'approximação deve-se tomar o dividendo e o divisor para que a approximação do quociente seja menor que uma quantidade dada* **E**.

Sendo α e β os erros desconhecidos, é claro que bastará pôr :

$$\frac{\alpha}{b} + \frac{a \times \beta}{b^2} < \mathbf{E} ;$$

tomando-se $\alpha < \mathbf{E}$, poder-se-ha sempre dar á β um valor tal que a somma $\frac{\alpha}{b} \times \frac{a \times \beta}{b^2}$ seja menor que **E**.

Exemplo. *A quarta parte da superficie da terra sendo somente habitada e havendo* 1500 *habitantes em cada myriametro quadrado, pergunta-se a população da terra a menos de* 1000 *habitantes.*

Em virtude da definição do metro o comprimento da circumferencia da terra é de 40000000 de metros ou 4000 myriametros; de outro lado sendo R o raio de um circulo, o comprimento de sua circumferencia é $2\pi R$; logo :

$$2\pi R = 4000,$$

d'onde se deduz :

$$R = \frac{4000}{2\pi} = \frac{2000}{\pi} ;$$

ora $4\pi R^2$ sendo a superficie da sphera de raio R, o quarto d'esta superficie é πR^2; substituindo, temos :

$$\pi R^2 = \pi \left(\frac{2000}{\pi}\right)^2 = \frac{4000000}{\pi} ;$$

em seguida o numero x de habitantes é

$$x = \frac{4000000 \times 1500}{\pi} = \frac{6000000000}{\pi} .$$

Trata-se de conhecer com que approximação deve-se tomar $\pi = 3,14159265358979....$ para que o quociente seja obtido a menos de 1000 unidades.

Em virtude do que se disse (nº 342 — II), o erro deve ser menor que

$$1000 \times \frac{9}{6000000000} = \frac{9}{6000000} < 0,00001\ ;$$

deve-se pois tomar $\pi = 3,14159$. Applicando-se o methodo da divisão abreviada, acha-se que o numero dos habitantes da terra a menos de 1000 é 1909860000.

Raiz quadrada.

343. Primeira questão. *Sendo α o erro commettido sobre um numero* a, *qual o erro commettido sobre sua raiz?*

Sendo E o erro desconhecido, e b a raiz de a, sabe-se (nº 336) que

$$\alpha = 2 \times b \times \mathrm{E},$$

d'onde se deduz:

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha}{2b} = \frac{\alpha}{2\sqrt{a}}$$

Assim, *o erro da raiz quadrada de um numero approximado é igual ao erro commettido sobre esse numero dividido por duas vezes a raiz.*

Exemplo. *Extrahir a raiz quadrada do numero* 627,32 *approximada a menos de* 0,01.

O erro da raiz é menor que $\frac{0,01}{2.25} = 0,0002$, ter-se-ha pois a raiz com tres algarismos decimaes exactos; empregando-se o

methodo abreviado da extracção da raiz quadrada, acha-se 22,963.

```
527,32    | 22,963
127       |--------
 43 32    | 42|449|
  2 9100  | 458
    1620  |------
     246  |  63
```


344. Segunda questão. *Qual o gráo d'approximação com que se deve calcular* a *para que o erro da raiz quadrada seja menor que* E.

Sendo α o erro commettido sobre o numero, o erro commettido sobre a raiz é $\frac{\alpha}{2\sqrt{a}}$, satisfaremos *a fortiori* a questão, pondo :

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{a}} < \text{E},$$

d'onde deduz-se :

$$\alpha < \text{E}. 2. \sqrt{a}.$$

Assim, *o limite do erro do numero deve ser menor que o limite do erro da raiz, multiplicado pelo dobro da raiz.*

Exemplo I. *Calcular com uma approximação menor que um decimo de segundo o tempo que emprega um corpo no vacuo, para cahir de uma altura de* 100 *metros.*

Demonstra-se na Physica a seguinte relação :

$$h = \frac{g t^2}{2}, \quad \text{em seguida } t = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

onde t representa o tempo, expresso em segundos, h a altura

e g (1) a acceleração da gravidade ou o dobro do espaço percorrido no vacuo durante o primeiro segundo por um corpo que cahe livremente.

No problema proposto a quantidade desconhecida sendo t, e $h=100$, temos:

$$t=\sqrt{\frac{200}{g}}.$$

Procuremos com que approximação $\frac{200}{g}$ deve ser calculado, para que t seja obtido com uma approximação menor que 0,1; sendo α o limite d'esse erro, deve-se pôr (nº 344)

$$\frac{\alpha}{2t}<0,1, \text{ donde}: \alpha<0,1\times 2t.$$

Ora t sendo maior que 4, a condição supra será preenchida, tomando-se $\alpha<0,1\times 8=0,8$; isto é, calculando-se a quantidade $\frac{200}{g}$ com uma approximação menor que 0,8; para o que cumpre tomar-se $g=9,8$.

Operando-se, acha-se:

$$\frac{200}{9,8}=20,4, \text{ em seguida}: \sqrt{20,4}=4'',5,$$

resultado approximado a 0,1.

Exemplo II. *Calcular* $\sqrt[4]{24325794}$ *com uma approximação menor que* 0,001.

Ora

$$\sqrt[4]{24325794}=\sqrt{\sqrt{24325794}};$$

busquemos com que approximação deve-se calcular a primeira

(1) No Observatorio de Paris $g=9^{m},80896$ ......

raiz para que a segunda seja obtida com uma approximação menor que 0,001 ; sendo α o limite d'esse erro, e a o valor da primeira raiz, deve-se ter (nº 344) :

$$\alpha < 0,001 \times 2.\sqrt{a}.$$

Ora a sendo menor que 4000, $\sqrt{a}$ é menor que 20, a condição supra será preenchida, tomando-se

$$\alpha < 0,001 \times 40, \text{ ou melhor ainda : } \alpha < 0,1.$$

Assim, deve-se calcular a primeira raiz a menos de 0,1 para obter-se a segunda a 0,001.

Raiz cubica.

345. PRIMEIRA QUESTÃO. *Sendo α o erro commettido sobre um numero* a, *qual o erro* **E** *da raiz cubica d'esse numero ?*

Sendo b a raiz cubica de a, e **E** o erro d'aquella raiz, o erro commettido sobre o cubo de b é $3.b^2.\mathbf{E}$; logo :

$$\alpha = 3.b^2.\mathbf{E}, \text{ donde : } \mathbf{E} = \frac{\alpha}{3b^2} = \frac{\alpha}{3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}$$

Assim, *o erro commettido sobre a raiz cubica é igual ao erro commettido sobre o numero dividido por tres vezes o quadrado da raiz cubica.*

SEGUNDA QUESTÃO. *Qual o gráo d'approximação com que deve-se calcular* a, *para que sua raiz cubica seja obtida com uma approximação menor que* **E** ?

Se α representa o erro que deve-se commetter sobre o nu-

mero, o erro da raiz é $\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a})^2}$; satisfaremos *a fortiori* a questão, pondo :

$$\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a})^2} < \mathbf{E}\ ,\quad \text{donde}\ ,\ \alpha < \mathbf{E}\,.\,3(\sqrt[3]{a})^2\,.$$

Assim, *o limite do erro commettido sobre o numero deve ser menor que o limite do erro da raiz, multiplicado por tres vezes o quadrado da raiz.*

Raiz de gráo m.

347. Primeira questão. — *Sendo* α *o erro commettido sobre um numero* a, *qual o erro* **E** *commettido sobre* $\sqrt[m]{a}$?

Suppondo $b = \sqrt[m]{a}$, vimos que o erro commettido sobre b^m é $\mathbf{E} \times m \times b^{m-1}$; logo,

$$\alpha = \mathbf{E} \times m \times b^{m-1}\ ,$$

d'onde deduz-se :

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha}{m.\,b^{m-1}} = \frac{\alpha}{m.(\sqrt[m]{a})^{m-1}}$$

Assim, *o erro commettido sobre a raiz de gráo* m *de um numero approximado, é igual ao erro do numero dividido por* m *vezes a potencia de gráo* m — 1 *d'aquella raiz.*

Segunda questão. *Qual o gráo d'approximação com que se deve calcular* a *para que* $\sqrt[m]{a}$ *seja approximada a menos de uma quantidade* **E**.

Sendo α o erro commettido sobre o numero, o erro commet-

tido sobre a raiz é $\frac{\alpha}{m(\sqrt[m]{a})^{m-1}}$; satisfaremos *a fortiori* a questão, pondo :

$$\frac{\alpha}{m(\sqrt[m]{a})^{m-1}} < \mathrm{E},$$

d'onde deduz-se :

$$\alpha < \mathrm{E}.m.(\sqrt[m]{a})^{m-1}.$$

Assim, *o erro do numero deve ser menor que o limite do erro que se quer commetter sobre a raiz, multiplicado por* m *vezes a potencia de gráo* m — 1 *d'aquella raiz.*

EXERCICIOS.

I. *Calcular a menos de* 0,00001 *a somma*

$$\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots\ldots\right)$$

II. *Calcular a menos de* 0,00001 *a expressão*

$$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots\right)$$

III. *Calcular a menos de* 0,001 *a expressão*

$$2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}$$

IV. *Calcular a menos de* 0,000001 *a fracção* $\frac{1}{\pi}$;

$$\pi = 3,1415926535897932\ldots$$

V. *Calcular a menos de* 0,001

$$\sqrt[3]{\frac{5130740}{\pi}}$$

VI. *Calcular a menos de* 1 *kilometro o comprimento da circumferencia da terra, partindo da definição do metro.*

VII. *Determinar, a menos de* 0,01, *o comprimento de uma circumferencia, cujo raio é igual a* $2^{m},256$.

VIII. *Determinar a* $0^{m},01$ *o raio de um circulo, cuja circumferencia é igual á* 6^{m}.

IX. *Calcular a superficie de um circulo cujo raio é igual á* $1^{m},5748$, *a menos de* 1 *decimetro quadrado.*

X. *A superficie de um circulo é de* 4 *metros quadrados; calcular a menos de* 0,001 *o raio d'esse circulo.*

XI. *Determinar por meio da formula da Physica*

$$V = \sqrt{2gh}$$

a velocidade V *com que chega á terra um corpo, abandonado livremente no vacuo, de uma altura* $h = 100^{m}$.

XII. *Partindo da mesma formula do problema precedente, pergunta-se a menos de* 0,1, *a altura de que cahe um corpo, que chega á terra com uma velocidade* $25^{m},33$.

XIII. *Determinar, a menos de* 1 *segundo, o numero de gráos de um arco de circulo, igual ao seo raio.*

XIV. *Determinar, a menos de* 1 *millimetro, a circumferencia, cujo raio é igual á diagonal de um quadrado, que tem* $0^{m},5$ *por lado.*

XV. *Calcular a menos de* 0,0001

$$\sqrt{428,32 + \sqrt{37,46}}$$

XVI. *O peso do ar atmospherico secco, no Observatorio de Paris,*

na temperatura do gelo, e sob a pressão de $0^{m},76$ *é* $\frac{1}{773,28}$ *do peso de um igual volume d'agua distillada no maximum de densidade. Pergunta-se a menos de* 1 *milligrammo o peso de* 1 *litro de ar.*

XVII. *A densidade do mercurio na temperatura do gelo é* 13,5980 *relativemente á agua distillada no maximum de densidade, determinar a menos de* 1 *decigrammo o peso de* 843,459 *centimetros cubos de mercurio.*

XVIII. *Calcular a menos de* 0,001 *a densidade da platina a zero grão, relativamente á agua distillada no maximum de densidade, sabendo-se que dous volumes iguaes de platina, e agua, em taes circunstancias pesão; o primeiro* $149^{g},498$, *e o segundo* $64^{g},793$.

XIX. *Calcular a menos de* 0,001

$$\sqrt[3]{246748+\sqrt{2}}$$

XX. *Demonstra-se na* MECANICA RACIONAL *a relação importante*

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

que se chama EQUAÇÃO DO PENDULO SIMPLES, *onde* t *(numero de segundos) representa o tempo de uma oscillação completa do pendulo,* l *seo comprimento; e as outras quantidades, seos valores conhecidos; determinar a menos de* 0,01 *o comprimento* l *do pendulo que batte o segundo em Paris; isto é, cuja oscillação se executa em um segundo, no vacuo.*

CAPITULO III.

ERROS RELATIVOS.

348. *Chama-se erro relativo a razão do erro absoluto de uma quantidade approximada ao valor exacto d'aquella quantidade.*

Se α é o erro absoluto commettido sobre o valor approximado a de uma quantidade A, e ε o erro relativo, temos

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{A}, \text{ d'onde } \alpha = \varepsilon \, . \, A.$$

É pelo erro relativo, e não pelo erro absoluto que deve-se julgar da approximação das quantidades; por quanto, não basta dizer-se que o erro commettido sobre certo comprimento é menor por exemplo que um millimetro, para que se possa concluir que a medida foi bem feita; porque sendo aquelle erro quasi nullo em um comprimento de 2 metros, é consideravel quando trata-se da medida do diametro de um tubo thermometrico.

Logo que se conhece o erro relativo commettido sobre o resultado de uma ou muitas operações é muito facil deduzir-se o numero dos algarismos exactos de que elle compõe-se: esta relação importante é expressa pelos dous theoremas seguintes.

349. Theorema I. *Logo que um numero* a *é conhecido com* m *algarismos exactos, a partir do algarismo* k *das mais altas unidades, o erro relativo* ε *é menor que a fracção* $\frac{1}{k.\, 10^{m-1}}$.

Tendo a por hypothese m algarismos, o erro absoluto α

commettido sobre aquelle numero é menor que uma unidade de ordem do seo ultimo algarismo á direita (nº 321); tomando aquella unidade por unidade principal, temos :

$$\alpha < 1, \text{ e } a > k.\, 10^{m-1};$$

por aquella duplice razão, temos :

$$\frac{\alpha}{a} \text{ ou } \varepsilon < \frac{1}{k.\, 10^{m-1}}$$

Exemplo I. Se no numero exacto 432,4739 conservão-se somente os cinco primeiros algarismos; isto é, 432,47, o erro absoluto é menor que 0,01, em seguida o erro relativo é menor que $\frac{1}{4.\, 10^4} = \frac{1}{40000}$.

Exemplo II. Se no numero 0,004673259 43 conservão-se os dous primeiros algarismos, o erro absoluto é menor que 0,0001, e o erro relativo menor que $\frac{1}{4.\, 10} = \frac{1}{40}$.

Observação. Muitas vezes, para maior simplicidade, toma-se por limite do erro relativo $\frac{1}{10^{m-1}}$ em lugar de $\frac{1}{k.\, 10^{m-1}}$; assim, nos exemplos precedentes os erros relativos serião menores que $\frac{1}{10000}$, e $\frac{1}{10}$.

350. Theorema II. *Se um numero* a, *cujo primeiro algarismo é* k, *foi calculado com um erro relativo menor que* $\frac{1}{(k+1).\, 10^{m-1}}$, *pode-se contar sobre os* m *primeiros algarismos d'aquelle numero; isto é, o erro absoluto será menor que uma unidade de ordem do seo ultimo algarismo.*

Com effeito, temos por hypothese, α designando o erro absoluto,

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{(k+1)\, 10^{m-1}};$$

de outro lado, tomando por unidade principal a unidade do ultimo algarismo do numero, temos

$$a < (k+1)\,10^{m-1};$$

em seguida

$$\alpha < 1 \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Exemplo. Se $\frac{1}{50000}$ ou $\frac{1}{(4+1)\times 10^{5-1}}$ é o erro relativo com que foi calculado o numero 432,725853 pode-se contar sobre os *cinco* primeiros algarismos, 432,72; ou o erro absoluto é menor que uma unidade de ordem do ultimo algarismo conservado; isto é, menor que 0,01.

351. *Observação* I. Se o primeiro algarismo k é desconhecido e se é impossivel determinal-o immediatamente, deve-se tomar por limite do erro relativo $\frac{1}{10^m}$ em lugar de $\frac{1}{(k+1)\times 10^{m-1}}$, por isso que k é quando muito igual a 9.

352. *Observação* II. Pode acontecer que um numero tendo sido calculado com uma approximação relativa menor que $\frac{1}{(k+1)\times 10^{m-1}}$, seo ultimo algarismo não seja exacto, como vamos vêr, pelo seguinte exemplo: supponhamos que o calculo de um numero 0,047935 conduza a um valor approximado 0,047843; o erro relativo aqui (nº 350) é menor que $\frac{1}{500} = \frac{1}{(4+1)\times 10^{3-1}}$; applicando o theorema supra podemos contar sobre tres algarismos; isto é, 0,0478; comparando-se porém este numero com o numero exacto, vê-se que o ultimo algarismo do numero approximado não é exacto. N'este caso augmenta-se com uma unidade o ultimo algarismo conservado, então o erro absoluto será menor que uma unidade de ordem do ultimo algarismo conservado. Assim no exemplo precedente deve-se tomar 0,0479. Isto tem lugar todas as vezes que o numero é approximado por defeito.

Do exposto resulta a seguinte regra de uso frequente:

Para calcular um numero com m *algarismos exactos, calcula-se um valor approximado para mais ou para menos, porém tal que o erro relativo seja menor que* $\frac{1}{(k+1)\times 10^{m-1}}$, *logo que o primeiro algarismo* k *é conhecido immediatamente, ou menor que* $\frac{1}{10^m}$, *logo que* k *não é conhecido; se o valor achado é approximado para mais, tomão-se os* m *primeiros algarismos desprezando-se os outros sem alterar o ultimo algarismo conservado; porém, se o valor é approximado para menos, augmenta-se com uma unidade o ultimo algarismo conservado; em um e outro caso o numero é approximado a menos de uma unidade do ultimo algarismo.*

Addição e subtracção.

353. N'estas duas operações é mais simples, e algumas vezes ha mesmo mais vantagem, empregar os erros absolutos em lugar dos erros relativos.

Multiplicação.

354. Theorema. *O erro relativo de um producto de dous factores approximados iguala a somma dos erros relativos dos dous factores.*

Sendo, a e b os numeros approximados, α e β seos erros absolutos respectivos, o erro absoluto do producto é $a\times\beta+b\times\alpha$, em seguida

$$\varepsilon=\frac{a\times\beta+b\times\alpha}{a\times b}=\frac{\beta}{b}+\frac{\alpha}{a}. \qquad o.\ q.\ e.\ v.\ d.$$

Observação I. Se as approximações dos dous factores são de

sentido opposto, é facil ver-se que o erro relativo do producto será igual á differença dos erros relativos dos dous factores.

Observação II. O theorema supra extende-se facilmente a um numero qualquer de factores approximados.

Quadrado, cubo, potencia de gráo m.

355. Theorema. *O erro relativo do quadrado de um numero approximado é igual ao dobro do erro relativo d'aquelle numero.*

Com effeito, o quadrado de um numero sendo um producto de dous factores iguaes á aquelle numero, o erro relativo do quadrado é igual á somma dos erros dos factores, ou ao dobro do erro relativo do numero dado.

356. Theorema. *O erro relativo do cubo de um numero approximado é igual ao triplo do erro relativo d'aquelle numero.*

A razão é por que o cubo é um producto de tres factores iguaes.

357. Theorema geral. *O erro relativo da potencia de gráo* m *de um numero approximado é igual á* m *vezes o erro relativo d'aquelle numero.*

A razão d'este theorema é por que uma potencia de gráo m é um producto de m factores iguaes.

APPLICAÇÕES.

Exemplo I. *Multiplicar* 432,42 *por* 3,1415, *approximados cada um a uma unidade dos seos ultimos algarismos.*

O erro relativo do multiplicando sendo menor que $\frac{1}{4.10^4}$, e o erro do multiplicador menor que $\frac{1}{3.10^4}$, o erro relativo do

producto será menor que $\frac{1}{4.10^4} + \frac{1}{3.10^4} < \frac{2}{3.10^4} < \frac{1}{10^4}$; por conseguinte (nº 351) pode-se contar sobre quatro algarismos do producto. Ora vê-se facilmente que este contem quatro na parte inteira; logo, o erro absoluto do producto é menor que 1; assim empregando a regra da multiplicação abreviada, teremos o producto pedido, calculando-o a menos de uma unidade.

Exemplo II. *Calcular o producto*

$$3,14159265\ldots\ldots \times 2,7182818\ldots\ldots$$

approximado a 0,001, *sabendo-se que podem-se obter aquelles numeros com uma approximação tão grande quanto se queira.*

O producto não tendo senão um algarismo na parte inteira, buscamos seos quatro primeiros algarismos, para o que basta que o erro relativo do producto seja menor que $\frac{1}{10^4}$, e em seguida que o erro relativo de cada factor seja menor que $\frac{1}{2.10^4}$; somos pois levados a buscar o producto $3,1415 \times 2,7182$ approximado a 0,001; operando-se, acha-se 8,540.

Divisão.

358. Theorema. *O erro relativo de um quociente é igual ao erro relativo do dividendo mais ou menos o erro relativo do divisor.*

O dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente, o erro do dividendo é igual á somma ou á differença dos erros do divisor e do quociente, se estes são approximados no mesmo sentido ou em sentido opposto; logo, o erro do quociente é igual ao erro do dividendo, diminuido ou augmentado com o erro do divisor.

Raiz quadrada. — Raiz cubica. — Raiz de gráo m.

359. THEOREMA. *O erro relativo da raiz quadrada de um numero é igual á metade do erro d'aquelle numero, approximado por defeito.*

O erro relativo do quadrado de um numero sendo o dobro do erro relativo do numero, é claro que o erro relativo da raiz quadrada será a metade do erro relativo do quadrado.

360. THEOREMA. *O erro relativo da raiz cubica de um numero é igual ao terço do erro relativo do numero, approximado por defeito.*

THEOREMA GERAL. *O erro relativo da raiz de gráo* m *de um numero é* m *vezes menor que o erro do numero approximado por defeito.*

A demonstração dos dous theoremas precedentes é identica á do primeiro; além disso estes theoremas podem ser demonstrados directamente, o que não offerece difficuldade alguma.

APPLICAÇÕES.

EXEMPLO I. *Dividir* 3,14159265 *por* 2,718281, *numeros approximados cada um a uma unidade dos seos ultimos algarismos.*

O erro relativo do dividendo sendo menor que $\frac{1}{3\times10^8}$, e o do divisor menor que $\frac{1}{2\times10^6}$, o erro do quociente é menor que $\frac{1}{3\times10^8}+\frac{1}{2\times10^6}$ ou menor que $\frac{1}{10^6}$; os seis primeiros algarismos do quociente são pois exactos, e como o algarismo das mais altas unidades do quociente exprime unidades simples, ha cinco algarismos decimaes exactos no quociente; somos leva-

dos a buscar por meio da divisão abreviada o quociente approximado a 0,00001. Operando-se, acha-se 1,15572.

EXEMPLO II. *Calcular a menos de* 0,001 *a fracção* $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

O quociente tendo um algarismo na parte inteira, procuramos por conseguinte os seos quatro primeiros algarismos, e o erro relativo que se quer commetter sobre elle é pois menor que $\frac{1}{10^4}$; logo, o erro relativo do dividendo e do divisor deve ser menor que $\frac{1}{2.10^4}$, e deve-se por consequencia tomar $\pi = 3,1415$, e $\sqrt{2} = 1,4142$. Empregando-se a regra da divisão abreviada, e calculando-se o quociente $\frac{3,1415}{1,4142}$ a menos de 0,001 obtem-se o numero pedido.

361. *Observação importante.* Quanto ao problema inverso, que constitue a segunda questão das approximações numericas, só trataremos nos erros relativos de uma maneira geral do que diz respeito á raiz de gráo qualquer, o problema nas outras operações não offerecendo difficuldade; alem disso fizemos precedentemente algumas applicações (exemplo II), que poderão supprir esta pequena lacuna, devida á falta de espaço.

Com quantos algarismos, se deve tomar um numero A, *para que sua raiz de gráo* n *seja obtida com* m *algarismos exactos, logo que se substitue ao numero exacto* A *o numero approximado* a.

A raiz $\sqrt[n]{a}$ devendo ter m algarismos, basta que o erro relativo da raiz seja menor que $\frac{1}{10^m}$, e o do numero a menor que $\frac{n}{10^m}$ (nº 357); ora na pratica n é quando menos igual á 2, por conseguinte bastará ter-se

$$\varepsilon < \frac{1}{10^m}$$

ε representando o erro relativo de a; para o que deve-se tomar $m+1$ algarismos á esquerda de a (nº 349).

Assim, *para obter* $\sqrt[n]{A}$ *com* m *algarismos exactos, bastará calcular* A *com* m + 1 *algarismos, por defeito.*

Se quizessemos por exemplo calcular $\sqrt[3]{\pi}$, com 5 algarismos exactos, applicando a regra precedente, deveriamos tomar : $\pi = 3,14159$; ao passo que pelo methodo ordinario teriamos necessidade de um maior numero de algarismos :

$$\pi = 3,14159265358 9.$$

Terminamos aqui a theoria das approximações numericas; sua utilidade e importancia são capitaes ; os problemas que alli resolvemos e as consequencias interessantes a que chegámos, são uma prova évidente. Aquelle que não tem conhecimento d'esta theoria, julga que o resultado de um calculo é tanto mais exacto quanto maior é o numero de decimaes de que elle se compõe — para calcular a raiz quadrada, por exemplo, de um numero com 10 algarismos exactos, é necessario calcular o dito numero com 20 algarismos — etc. ; a theoria das approximações prescreve regras exactas, guia o calculador na marcha do seo calculo, e annuncia-lhe finalmente o numero de algarismos exactos, com que deve contar.

EXERCICIOS.

I. *Com quantos algarismos exactos pode-se contar no producto dos numeros*, 46,7483, 3,78972, *approximados a menos de uma unidade de seos ultimos algarismos.*

II. *Calcular* $\pi \times \sqrt{2}$ *a menos de* 0,001.

III. *Determinar o gráo d'approximação do quociente dos dous numeros,* 168,3256, 2,7894, *approximados a menos de uma unidade dos seos ultimos algarismos.*

IV. *Calcular* $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ *a menos de* 0,001.

V. *Calcular com tres algarismos decimaes exactos* $\sqrt{144+\frac{5}{7}}$.

VI. *Calcular com dous algarismos decimaes exactos*

$$\sqrt{3+\sqrt{2}}.$$

VII. *Calcular a menos de* 0,01 *o raio de um circulo cuja area, approximada a menos de uma unidade, é* 4678 *centimetros quadrados.*

VIII. *Calcular a menos de* 0,01 *o lado do quadrado equivalente a um triangle equilateral, cujo apothema tem* $2^m,50$ *de comprimento.*

IX. *Calcular com tres algarismos exactos o lado do quadrado equivalente ao circulo, cujo raio é de* 1^m.

X. *Calcular com* 4 *algarismos exactos*

$$2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\ldots}}}$$

LIVRO VII.

Razões. — Progressões. — Logarithmos.

—o—

CAPITULO PRIMEIRO.

RAZÕES.

Razões das grandezas. — Razões dos numeros.

362. *Razão de uma grandeza a outra de mesma natureza é o numero que mede a primeira, logo que se toma a segunda por unidade.*

363. *Razão de um numero a outro é o quociente da divisão do primeiro pelo segundo;* este chama-se *denominador*, aquelle *numerador*, e considerados juntamente, *termos da razão.*

A razão de dous numeros, 8 e 3 por exemplo escreve-se do modo seguinte:

$$\frac{8}{3}, \text{ ou } 8:3$$

que se lê : *oito está para tres* ; a maneira ultima cahio em desuso.

Pelo que temos dito até aqui, quociente, fracção e razão exprimem a mesma cousa.

364. THEOREMA. *A razão de uma grandeza a outra da mesma especie é igual á razão dos numeros que lhes servem de medida.*

Sejão A e B duas grandezas da mesma especie, que admittão uma medida commum; supponhamol-a contida 3 vezes em A, e 7 vezes em B; A contem por conseguinte 3 vezes um septimo de B; isto é $\frac{3}{7}$ de B; B contêm 7 vezes um terço de A; isto é $\frac{7}{3}$ de A; assim a razão de A a B, ou de B a A, é expressa pela razão numerica $\frac{3}{7}$ ou $\frac{7}{3}$.

Observação I. Duas fracções taes como $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{3}$ são ditas *inversas;* é manifesto que o producto de duas razões inversas é igual á unidade; assim $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = 1$.

Observação II. O theorema acima demonstrado convem tambem ás grandezas incommensuraveis, o que não seria difficil demonstrar-se.

Propriedades das razões numericas.

365. Como uma razão não é mais do que uma fracção, todos os theoremas demonstrados, relativamente ás fracções, se applicão tambem ás razões.

Consideramos pois como demonstrados os theoremas seguintes :

I. *Logo que se multiplica ou divide o numerador de uma razão por um numero, a razão vem a ser esse numero de vezes maior ou menor.*

II. *Logo que se multiplica ou divide o denominador de uma*

razão por um numero, a razão vem a ser esse mesmo numero de vezes menor ou maior.

III. *Logo que se multiplicão ou dividem por um mesmo numero os dous termos de uma razão, esta não muda de valor.*

IV. *A somma dos numeradores dividida pela somma dos denominadores de uma serie de razões iguaes, é uma razão igual ás primeiras.*

Propriedades das razões iguaes (1).

266. Á igualdade de duas razões tambem se dá o nome de *proporção.*

Escreve-se a igualdade de duas razões dous modos seguintes :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a : b :: c : d \quad (2)$$

que se lê :

a *está para* b *como* c *está para* d;

o ultimo está abandonado; só empregaremos o primeiro.

367. Theorema I. *Quando duas razões são iguaes, os productos em cruz são iguaes.*

Tendo-se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (\alpha)$$

(1) Sob o titulo — *Propriedades das razões iguaes* — expomos quatro theoremas muito simples, que comprehendem toda a antiga theoria das proporções.

(2) Eis os antigos nomes dos termos de uma proporção : a e d extremos ; b e c meios ; a e c antecedentes ; b e d consequentes.

Repetimos, nunca faremos uso d'essas denominações , por quanto consideramos as proporções como igualdades de razões, e que razões, fracções e quocientes exprimem a mesma cousa.

trata-se de demonstrar que

$$a \times d = b \times c$$

Com effeito, reduzindo as fracções iguaes (α) ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d};$$

d'onde se deduz

$$a \times d = b \times c. \quad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

368. Theorema II. *Logo que duas razões são iguaes, a razão dos numeradores é igual á razão dos denominadores.*

Tendo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

queremos demonstrar que

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Ponhamos, o que é possivel,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$$

$\frac{p}{q}$ sendo uma fracção irreduzivel; logo,

$$a = m \times p \qquad b = m \times q$$
$$c = m' \times p \qquad d = m' \times q;$$

d'onde se deduz pela divisão,

$$\frac{a}{c}=\frac{m\times p}{m'\times p}=\frac{m}{m'},\ \frac{b}{d}=\frac{m\times q}{m'\times q}=\frac{m}{m'};$$

logo :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}. \qquad o.\,q.\,e.\,n.\,d.$$

369. Theorema III. *Logo que duas razões são iguaes, dividindo-se a somma ou a differença dos seos termos pelo denominador correspondente, obtem-se duas outras razões iguaes.*

Tendo

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

queremos demonstrar que

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};$$

com effeito, é manifesto que

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1;$$

reduzindo a fracção e o inteiro a uma só expressão fraccionaria, temos :

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}. \qquad o.\,q.\,e.\,n.\,d.$$

370. Corollario I. *Se duas razões são iguaes, dividindo-se o numerador de cada razão pela somma ou pela differença dos seos termos, obtem-se duas outras razões iguaes.*

Tendo

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

temos tambem

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

e em virtude do theorema precedente

$$\frac{b \pm a}{a}=\frac{c \pm d}{c};$$

d'onde deduz-se

$$\frac{a}{b \pm a}=\frac{c}{c \pm d}. \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

371. Corollario II. *Se duas razões são iguaes, dividindo-se a somma dos termos de cada razão pela sua differença, formão-se duas razões iguaes.*

De

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

deduz-se

$$\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d} \quad (\text{n}^\circ\ 369)$$

e d'esta igualdade a seguinte

$$\frac{a \pm b}{c \pm d}=\frac{b}{d} \quad (\text{n}^\circ\ 368);$$

isto é,

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d},$$

d'onde se tira

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad (\text{n}^\circ\ 368). \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

372. THEOREMA IV. *Logo que duas razões são iguaes, a somma e a differença dos numeradores dividida pela somma e differença dos denominadores fórmão duas razões iguaes ás primeiras.*

Da igualdade

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

deduz-se

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad (\text{n}^\circ\ 368)$$

d'esta a seguinte

$$\frac{a \pm c}{c}=\frac{b \pm d}{d} \quad (\text{n}^\circ\ 369)$$

e d'esta emfim a seguinte

$$\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}. \quad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

373. COROLLARIO. *Logo que duas razões são iguaes, dividindo-se a somma dos numeradores pela sua differença, e a somma dos denominadores pela sua differença obtem-se duas razões iguaes.*

Da ultima igualdade acima conclue-se :

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}.$$

e d'esta a seguinte

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}. \quad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Media differencial e arithmetica.

374. Media differencial entre dous numeros é outro numero que excede ao menor em tanto quanto é excedido pelo maior.

Assim 7 é media differencial entre 4 e 10.

375. Principio. *A media differencial entre dous numeros é igual á metade de sua somma.*

Sejão a, e b os dous numeros dados, x a media differencial d'esses numeros, e d a differença constante ; é facil ver-se que

$$a-d=x$$
$$b+d=x;$$

somando membro a membro, temos :

$$a+b=2x,$$

e $$x=\frac{a+b}{2}.$$ *o. q. e. n. d.*

A media differencial entre 4, e 12 é $\frac{4+12}{2}=8$; a media differencial entre 3, e 7 é $\frac{3+7}{2}=5$, o que se verifica facilmente.

376. *Media arithmetica de muitas quantidades é o quociente da divisão da somma d'essas quantidades pelo numero d'ellas.*

Assim a media arithmetica dos 3 numeros 3, 6, 18 é $\frac{3+6+18}{3}=9$.

Em geral a media arithmetica de n quantidades $a, b, c, \ldots.. l$, é

$$\frac{a+b+c+\ldots.+l}{n}$$

Esta operação arithmetica é muitas vezes empregada, sobretudo quando se trata de observações physicas, d'operações de

medida geometrica, em fim d'operações, cujos resultados se achão affectados de erros.

Media proporcional ou geometrica.

377. Logo que em duas razões iguaes o denominador de uma é igual ao numerador da outra, esse numero chama-se *media proporcional ou geometrica* entre os dous outros.

378. PRINCIPIO. *A media geometrica entre duas quantidades, é igual á raiz quadrada do producto d'essas quantidades.*

Sendo b a media geometrica entre a e d, temos :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{d},$$

d'onde se deduz

$$b^2=a\times d, \quad \text{e} \quad b=\sqrt{a\times d} \qquad \textit{o. q. e. n. d.}$$

EXERCICIOS.

I. *Tendo-se uma serie de razões iguaes*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ldots$$

demonstrar que se tem tambem :

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2+e^2+\ldots.}}{\sqrt{b^2+d^2+f^2+\ldots.}}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ldots$$

II. *Tendo-se*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \text{e} \quad \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$$

demonstrar que só se tem

$$\frac{a \times a'}{b \times b'} = \frac{c \times c'}{d \times d'}$$

nos dous casos seguintes :

1. — *Quando as razões da primeira proporção são iguaes ás da segunda.*

2. — *Quando a razão dos numeradores ou dos denominadores da primeira é igual á razão dos numeradores ou dos denominadores da segunda.*

III. *Supponhamos que em certo lugar se observa o thermometro*

ás 4 horas da manhã	13°,75
ás 10 horas da manhã	19°,82
ás 4 horas da tarde	22°,31
ás 10 horas da noute	16°,84

Determinar a temperatura media do dia d'aquelle lugar, sabendo-se que aquellas quatro observações são sufficientes.

IV. *Tendo-se observado o barometro durante o dia em certo lugar, achou-se :*

ás 4 horas da manhâ	737^{m},50
ás 9 horas do dia	738^{m},15
ás 3 horas da tarde	737^{m},07
ás 9 horas da noute	737^{m},82

Pergunta-se a altura media do barometro durante o dia.

V. *Demonstrar que a media geometrica de dous numeros é menor que sua media differencial.*

CAPITULO II.

PROGRESSÕES.

Progressões arithmeticas.

379. *Chama-se progressão arithmetica ou por differença uma serie de quantidades taes, que a differença entre duas quantidades consecutivas é constante.*

Essas quantidades chamão-se *termos* da progressão, e a differença constante, *razão* da progressão.

A progressão é *crescente* logo que os seos termos vão crescendo successivamente, e *decrescente* no caso contrario.

Eis como se escreve uma progressão arithmetica :

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 .$$

esta progressão é crescente e 3 é a razão ; a seguinte:

$$\div 29 . 26 . 23 . 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2$$

é decrescente, e 3 é a razão.

380. THEOREMA FUNDAMENTAL. *Em toda progressão arithmetica crescente um termo qualquer é igual ao primeiro mais tantas vezes a razão, quantos são os termos que o precedem.*

Seja a progressão crescente, que suppomos conter n termos,

$$\div a . b . c . d . \dots\dots k . l$$

e r a razão.

É claro que

$$b=a+r$$
$$c=b+r=a+r+r=a+2r$$
$$d=c+r=a+2r+r=a+3r$$
. . . .
. . . .

O quarto termo d, por exemplo, é igual ao primeiro a mais 3 vezes a razão; e em geral o termo l de ordem n é igual ao primeiro a mais $(n-1)$ vezes a razão; isto é,

$$l=a+(n-1)\times r.$$

Observação. A progressão acima pode ser escripta do seguinte modo, em virtude do que acabámos de ver:

$$\div a\,.\,a+r\,.\,a+2r\,.\,a+3r\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a+(n-1)\,r\,.$$

Inserção de meios arithmeticos entre duas quantidades dadas.

381. Inserir certo numero n de meios arithmeticos entre dous numeros a, e l, é formar uma progressão arithmetica começando em a e terminando em l.

Tudo se reduz a achar a razão da progressão, por quanto conhecida esta, será facil formar seos differentes termos. Eis a questão que se trata de resolver.

382. Problema. *Inserir* n *meios arithmeticos entre* a *e* b.

A progressão buscada terá $(n+2)$ termos que vem a ser: n meios arithmeticos que se quer inserir, mais os dous termos extremos; ora, como o ultimo termo l é igual ao primeiro a mais $(n+1)$ vezes a razão, temos

$$l=a+(n+1)\times r$$

d'onde se deduz :

$$r = \frac{l - a}{n + 1}$$

Assim, *para obter-se a razão divide-se a differença dos dous numeros dados pelo numero dos meios, que se quer inserir, mais um.*

Seja proposto, por exemplo, inserir 5 meios arithmeticos entre dous numeros 6, e 48 ; applicando a regra acima, temos :

$$r = \frac{48 - 6}{6} = 7$$

e a progressão buscada é

$$\div 6 . 13 . 20 . 27 . 34 . 41 . 48 .$$

383. THEOREMA I. *Se entre dous termos consecutivos de uma progressão por differença se insere o mesmo numero de meios, as progressões parciaes formão uma só e mesma progressão.*

Seja a progressão

$$\div a . b . c . d \ldots\ldots k . l$$

supponhamos que n seja o numero de meios arithmeticos, que se quer inserir entre a e b, entre b e c, entre c e d, etc. ; r, r', r'', ... representando as razões d'essas differentes progressões, temos

$$r = \frac{b - a}{n + 1}, \ r' = \frac{c - b}{n + 1}, \ r'' = \frac{d - c}{n + 1}, \ldots\ldots$$

Ora

$$b - a = c - b = d - c = \ldots$$

por isso que cada uma d'essas differenças representa a razão

da progressão dada; logo,

$$r = r' = r'' = \ldots..$$

a razão é, por conseguinte, a mesma em todas as progressões parciaes; alem d'isso, o numero que termina cada progressão, é o primeiro da progressão seguinte; logo, todas essas progressões parciaes formão uma só e mesma progressão.

384. THEOREMA II. *Para inserir* (pp' — 1) *meios entre dous numeros* a, *e* l, *pode-se inserir* (p — 1) *meios entre esses numeros e inserir depois* (p' — 1) *meios entre os termos da progressão obtida precedentemente.*

A razão da progressão obtida inserindo-se (p — 1) meios entre a e l, é

$$\frac{l-a}{p}$$

suppondo-se $l > a$; e a razão da progressão obtida inserindo-se (p' — 1) meios entre dous termos d'esta ultima é

$$\frac{\left(\frac{l-a}{p}\right)}{p'} = \frac{l-a}{pp'};$$

porém $\frac{l-a}{pp'}$ é justamente a razão da progressão obtida inserindo-se (pp' — 1) meios entre a e l; logo, etc.

Somma dos termos de uma progressão arithmetica.

385. LEMMA. *Em toda progressão arithmetica a somma dos termos equidistantes dos extremos é constante, e igual á somma dos extremos.*

Sejão a e l os termos extremos, h um termo precedido de n outros, e k outro termo seguido de n outros.

$$\div\, a \ldots_{n} \ldots h \ldots\ldots\ldots k \ldots_{n} \ldots l$$

É claro que

$$h = a + n \times r$$
$$l = k + n \times r;$$

diminuindo essas igualdades membro a membro, temos :

$$l - h = k - a$$

ou

$$h + k = a + l. \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

386. Theorema. *A somma dos termos de uma progressão arithmetica é igual á metade do producto da somma dos extremos pelo numero dos seos termos.*

S representando a somma dos termos da progressão

$$\div . a . b . c . . . . h . k . l$$

temos :

$$S = a + b + c + ... + h + k + l$$

ou

$$S = l + k + h + ... + c + b + a,$$

invertendo a ordem dos termos.

Ajuntando essas duas igualdades, e observando que a somma de dous termos que se correspondem é igual á somma dos extremos, temos :

$$2\,S = (a + l) \times n,$$

n representando o numero dos termos da progressão ; logo,

$$S = \frac{(a + l) \times n}{2}. \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

A somma dos termos da progressão

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15$$

é

$$\frac{(3 + 15) \times 7}{2} = 63$$

Progressões geometricas.

387. *Progressão geometrica é uma serie de quantidades taes, que a razão de duas consecutivas d'essas quantidades é constante.*

Logo que a razão é maior que a unidade, a progressão é *crescente*, e *decrescente* quando a razão é menor que a unidade.

Escreve-se uma progressão geometrica do modo seguinte :

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 ;$$

esta progressão, cuja razão é 3, é crescente ; a seguinte cuja razão é $\frac{1}{3}$,

$$\div\div\ 162 : 54 : 18 : 6 : 2$$

é decrescente.

388. Theorema fundamental. *Em toda progressão geometrica um termo qualquer é igual ao primeiro multiplicado pela razão, affectada com um expoente, igual ao numero dos termos que o precedem.*

Seja a progressão crescente

$$\div\div\ a : b : c : d : \ldots\ldots : l$$

e q sua razão ; é facil ver-se que

$$b = a \times q$$
$$c = b \times q = a \times q \times q = a \times q^2$$
$$d = c \times q = a \times q^2 \times q = a \times q^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

O quarto termo d, por exemplo, é igual ao primeiro a multiplicado pela razão q elevada á 3ª potencia ; em geral o termo

l de ordem n é igual ao primeiro a multiplicado pela razão q affectada do expoente $(n-1)$, numero dos termos que precedem l; isto é,

$$l = a \times q^{n-1}.$$

Inserção de meios geometricos entre duas quantidades dadas.

389. Inserir n meios geometricos entre duas quantidades a e l, é formar uma progressão geometrica começando em a e terminando em l.

Tudo consiste em determinar a razão da progressão, por quanto conhecida esta, nada é tão facil como formar a progressão.

Eis a questão que nos propomos a resolver.

390. PROBLEMA. *Inserir* n *meios geometricos entre dous numeros* a *e* l.

A progressão conterá $(n+2)$ termos, e q representando a razão buscada da progressão, temos

$$l = a \times q^{n-1}$$

d'onde se deduz :

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{l}{a}}$$

Assim, *para obter-se a razão, do quociente dos dous numeros dados extrahe-se a raiz, cujo indice iguala ao numero dos meios que se quer inserir mais um.*

Seja proposto, por exemplo, inserir 3 meios geometricos entre 5 e 6480 ; applicando a regra acima, temos :

$$q = \sqrt[4]{\frac{6480}{5}} = 6 ;$$

a progressão será :

$$\div 5 : 30 : 180 : 1080 : 6480$$

391. Theorema. *Se entre dous numeros consecutivos de uma progressão geometrica se insere o mesmo numero de meios geometricos, as progressões parciaes formão uma só e mesma progressão.*

Deixamos ao leitor a demonstracção d'este theorema, que é identica a do correspondente nas progressões arithmeticas (nº 383).

Producto dos termos de uma progressão geometrica.

392. Lemma. *O producto de dous termos equidistantes dos extremos é constante e igual ao producto dos extremos.*

Seja a progressão

$$\div\!\div a : \ldots_n \ldots : h : \ldots\ldots k : \ldots_n \ldots : l$$

na qual a e l são os extremos, h um termo precedido de n outros; e k, outro termo seguido de n outros; ora

$$h = a \times q^n$$

e

$$l = k \times q^n\;;$$

dividindo membro a membro essas igualdades, temos:

$$\frac{h}{l} = \frac{a}{k}$$

ou

$$a \times l = h \times k. \qquad o.\,q.\,e.\,n.\,d.$$

393. Theorema. *O producto dos termos de uma progressão geometrica é igual á raiz quadrada do producto dos extremos, affectado de um expoente igual ao numero dos termos da progressão.*

P representando o producto da progressão

$$\div\!\div a : b : c : \ldots\ldots\ldots : h : k : l$$

temos :

$$P = a \times b \times c \times \ldots\ldots \times h \times k \times l$$

ou

$$P = l \times k \times h \times \ldots\ldots \times c \times b \times a,$$

invertendo a ordem dos factores. Fazendo os productos d'essas igualdades membro a membro, e notando que o producto de dous factores, que se correspondem, é igual ao producto dos extremos, temos :

$$P^2 = (a \times l)^n,$$

n representando o numero dos termos da progressão; logo,

$$P = \sqrt{(a \times l)^n}. \qquad o.\ q.\ e.\ n.\ d.$$

Somma dos termos de uma progressão geometrica.

394. THEOREMA. *A somma dos termos de uma progressão geometrica decrescente, é igual ao quociente da divisão do primeiro termo, menos o producto do ultimo pela razão, pela unidade menos a razão.*

S representando a somma e q a razão, da progressão

$$\div\!\!\div\ a : b : c : \ldots\ldots : h : k : l$$

que suppomos decrescente, temos :

$$S = a + b + c + \ldots\ldots + h + k + l$$

e

$$S \times q = b + c + \ldots\ldots\ldots + k + l + l \times q$$

multiplicando a primeira por q.

Subtrahindo-se a segunda da primeira, e notando-se que $S \times q$ é menor que S, tem-se :

$$S - S \times q = a - l \times q$$

por isso que os outros termos se annulão pela subtracção.

Pode-se escrever a ultima igualdade do modo seguinte :

$$S(1-q)=a-l\times q,$$

d'onde se deduz :

$$S=\frac{a-l\times q}{1-q}. \qquad (1)$$

Se quizessemos conhecer por exemplo a somma dos termos da progressão

$$\div\div \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{32}$$

cuja rasão é $\frac{1}{2}$; empregando a formula (1), temos

$$S=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}.$$

395. *Observação* I. A formula (1) exige o conhecimento do ultimo termo da progressão para se poder obter a somma dos seos termos; vamos dar outra formula, onde não entra l, porem onde é necessario conhecer-se o numero dos termos. A progressão dada tendo n termos, sabe-se que

$$l=a\times q^{n-1};$$

Escrevendo $a\times q^{n-1}$ no valor de S em lugar de l, temos :

$$S=\frac{a-a\times q^n}{1-q}=\frac{a\times(1-q^n)}{1-q} \qquad (2).$$

Applicando esta formula ao exemplo precedente, temos :

$$S=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}.$$

396. *Observação* II. Se a progressão é crescente, as formulas (1), e (2) soffrem uma modificação; repetindo os raciocinios que fizemos no primeiro caso, obtem-se as duas formulas seguintes:

$$S = \frac{l \times q - a}{q - 1}, \quad S = \frac{a \times (q^n - 1)}{q - 1}.$$

A somma dos termos da progressão

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162$$

cuja razão é 3, é, empregando-se a primeira formula

$$\frac{162 \times 3 - 2}{3 - 1} = 242.$$

e empregando-se a segunda

$$\frac{2 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} = 242.$$

Limite da somma dos termos de uma progressão decrescente até o infinito (1).

397. Lemma I. *As potencias successivas de uma quantidade maior que a unidade crescem successivamente á medida que*

(1) A progressão decrescente:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\cdots$$

cuja razão é $\frac{1}{4}$, foi a primeira que se sommou.

Archimedes calculando a área de um segmento de parabola comprehendido entre um arco da curva e sua corda, foi levado a sommar a progressão supra.

O sabio grego só calculou aquella, deo uma regra bastante complicada em lin-

cresce o expoente, que pode ser tomado assaz grande, para que a potencia exceda a toda quantidade dada.

Seja a o numero dado, maior que a unidade; é claro que a^{m+1} é maior que a^m, por quanto

$$a^{m+1} = a^m \times a ;$$

o multiplicador a sendo maior que a unidade, o producto a^{m+1} é maior que o multiplicando a^m.

Passemos á segunda parte da demonstracção; ponhamos:

$$a = 1 + \alpha$$

por isso que a é uma quantidade maior que a unidade.

É manifesto que

$$a^{m+1} - a^m = a^m \times (1 - a) = a^m \times \alpha ;$$

porem a^m sendo maior que a unidade, $a^m \times \alpha$ é superior a α; por conseguinte, a differença entre duas potencias successivas de a é maior que α; logo, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a - 1 = \alpha \\ a^2 - a > \alpha \\ a^3 - a^2 > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^m - a^{m-1} > \alpha \end{array}\right\} (1) ;$$

é claro que a somma dos primeiros membros das relações supra é maior que a dos segundos; ora, esta é $m \times \alpha$, e aquella $a^m - 1$; logo,

$$a^m - 1 > m \times \alpha \qquad (2)$$

guagem ordinaria, e chegou á aquella regra por um methodo diverso do que empregámos (nº 400); methodo, que não expômos aqui por falta de espaço.

Se a^m deve ser maior que uma quantidade dada N, bastará escrever-se

$$m \times \alpha > N - 1 \qquad (3)$$

e tomar-se

$$m > \frac{N-1}{\alpha}$$

o que é sempre possivel; operando assim, teremos *a fortior*

$$a^m - 1 > N - 1$$

ou

$$a^m > N.,$$

o que se pedia.

398. Consequencia. Um termo de uma progressão crescente, cresce alem de todo limite.

399. Lemma II. *As potencias successivas de uma quantidade, menor que a unidade, diminuem successivamente e teem zero por limite.*

Toda quantidade menor que a unidade pode ser representada pela fracção $\frac{1}{1+\alpha}$, α sendo uma quantidade muito pequena.

Observando-se que

$$\frac{1}{(1+\alpha)^{m+1}} = \frac{1}{(1+\alpha)^m} \times \frac{1}{1+\alpha}$$

vê-se facilmente que $\frac{1}{(1+\alpha)^{m+1}}$ é menor que $\frac{1}{(1+\alpha)^m}$, visto que a primeira quantidade é um producto de duas outras menores que a unidade (nº 205).

De outro lado á medida que m cresce, a fracção $\frac{1}{(1+\alpha)^m}$ diminue; por isso que seo denominador augmenta (lemma I);

por conseguinte se m cresce indefinadamente, $(1+\alpha)^m$ cresce sem limite, e a fracção $\frac{1}{(1+\alpha)^m}$ tem por limite zero.

400. THEOREMA. *A somma dos termos de uma progressão decrescente até o infinito é igual ao primeiro termo dividido pela differença entre a unidade e a razão.*

Achamos (nº 395)

$$S = \frac{a - aq^n}{1-q},$$

o que se pode escrever

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{a \times q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \times q^n \ ;$$

esta formula dá a somma de um numero determinado n de termos de uma progressão decrescente, buscamos porem a somma dos termos de uma progressão decrescente até o infinito; ora q sendo um numero menor que a unidade, q^n tende para zero a medida que n cresce successivamente; logo, considerando a progressão com todos os seos termos, temos :

limite $q^n = 0$, por conseguinte lim. $\frac{a}{1-q} \times q^n = 0$,

por isso que $\frac{a}{1-q}$ é um factor constante; logo,

$$\text{lim. } S = \frac{a}{1-q}. \qquad (1)$$

o. q. e. n. d.

EXEMPLO I. *Sommar a progressão decrescente*

$$\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \ldots\ldots$$

cuja razão é $\frac{1}{2}$.

Empregando a formula (1), temos

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Exemplo II. *Sommar a progressão decrescente*

$$\div \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \frac{1}{243} : \ldots\ldots$$

cuja razão é $\frac{1}{3}$

Empregando a formula, temos :

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Applicação. Toda fracção decimal periodica pode ser considerada como uma progressão geometrica decrescente. Seja por exemplo a fracção decimal periodica

$$0,272727\ldots..$$

é claro que se pode escrever esta fracção do modo seguinte

$$\div \frac{27}{100} : \frac{27}{100^2} : \frac{27}{100^4} : \ldots\ldots$$

empregando a formula (1), temos por somma da progressão, cuja razão é $\frac{1}{100}$

$$S = \frac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{27}{99},$$

resultado obtido na theoria das fracções decimaes periodicas.

EXERCICIOS.

I. *O primeiro termo de uma progressão por differença é* 7, *o segundo* 11, *e o ultimo* 59. *Qual o numero dos termos d'esta progressão?*

II. *A somma dos termos de uma progressão por differença é* 15400, *o ultimo termo é* 262, *e o numero dos termos* 88. *Qual o primeiro termo?*

III. *Calcular as sommas das progressões seguintes:*

$$\div \frac{1}{2} . 1 . \frac{3}{2} . 2 . \frac{5}{2} \ldots\ldots$$

$$\div \frac{1}{5} . \frac{2}{5} . \frac{3}{5} . \frac{4}{5} . 1 \ldots\ldots$$

$$\because \frac{1}{4} : \frac{1}{4^2} : \frac{1}{4^3} : \frac{1}{4^4} : \ldots\ldots$$

$$\because \frac{1}{0,1} : \frac{1}{(0,1)^2} : \frac{1}{(0,1)^3} : \frac{1}{(0,1)^4} \ldots\ldots$$

IV. *Demonstrar que a somma*

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

é comprehendida entre 2 *e* 3.

V. *Demonstrar que o quadrado da somma dos* n *primeiros numeros inteiros é igual á somma dos cubos d'esses mesmos numeros.*

VI. *Achar o limite da somma das fracções*

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{52} + \ldots\ldots$$

cujos numeradores formão uma progressão arithmetica, e os denominadores uma progressão geometrica.

VII. *A somma de uma progressão de 9 termos é 225, e a differença dos extremos é 16. — Formar a progressão.*

VIII. *Dezaseis numeros formão uma progressão, cuja somma é 320 ; a razão do primeiro ao ultimo termo é $\frac{1}{7}$. Quaes são esses numeros?*

IX. *Calcular a somma dos* n *primeiros numeros inteiros.*

X. *Calcular a somma dos* n *primeiros numeros pares.*

CAPITULO III.

LOGARITHMOS.

Definições.

401. Duas progressões crescentes sendo dadas, uma geometrica começando pela unidade e outra arithmetica começando por zero, os termos d'esta são os *logarithmos* dos termos correspondentes d'aquella.

Assim, sendo dadas as progressões

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots . q^m \ldots .$$
$$\div 0 . r . 2r . 3r . \ldots . m \times r \ldots .$$

r, $2r$, etc., são os logarithmos de q, de q^2, etc.

Observação. Os expoentes da razão na primeira progressão são iguaes aos factores que multiplicão a razão na segunda nos termos correspondentes; assim q^m tem por logarithmo $m \times r$.

402. Pela definição de logarithmo, que demos (nº 401), parece que os numeros que se achão na progressão geometrica, são os unicos que tenhão logarithmos; porém vamos ver que um

numero qualquer tem sempre um logarithmo commensuravel ou incommensuravel.

Inserindo-se entre dous termos consecutivos da progressão geometrica um numero de meios geometricos assaz grande, obtem-se uma nova progressão geometrica; inserindo-se tambem entre dous termos consecutivos da progressão arithmetica o mesmo numero de meios, obtem-se outra progressão arithmetica, cujos termos são os logarithmos dos termos correspondentes da nova progressão geometrica. Se o numero de meios que se insere é muito grande, é claro que os termos da progressão arithmetica serão os logarithmos exactos dos numeros, que se achão inscriptos na progressão geometrica, e ao mesmo tempo os logarithmos approximados dos numeros, que não se achão alli.

No entretanto, se $n - 1$ representa o numero de meios que se quer inserir, vamos demonstrar que se pode tomar n assaz grande para que os termos das duas novas progressões cresção por gráos insensiveis.

A differença entre dous termos consecutivos da nova progressão arithmetica é $\frac{r}{n}$; se se quer que esta differença seja menor que uma quantidade dada ε, bastará escrever :

$$\frac{r}{n} < \varepsilon ,$$

e tomar por conseguinte

$$n > \frac{r}{\varepsilon} .$$

De outro lado, o excesso da razão da nova progressão geometrica sobre a unidade pode ser tomado menor que toda quantidade dada ω. Com effeito, pondo

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \omega$$

ou

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \omega$$

temos, elevando á potencia de gráo n,

$$a < (1 + \omega)^n;$$

ou

$$(1 + \omega)^n > a$$

o que é possivel (nº 397), por quanto $1 + \omega$ é uma quantidade superior a unidade.

Por conseguinte, se um numero N não faz parte da progressão geometrica mesmo depois da inserção de um numero muito grande de meios geometricos, elle será comprehendido entre dous outros, que farão parte d'ella e differirão entre si em uma quantidade infinitamente pequena, e do numero dado em menos d'essa quantidade; logo o logarithmo do numero N será comprehendido entre os logarithmos dos numeros que comprehendem N, e differirão do logarithmo de N em uma quantidade infinitamente pequena.

403. A unica condição, a que submettemos as duas progressões que nos servirão de ponto de partida para a definição dos logarithmos, foi que a progressão geometrica começasse pela unidade, e a progressão arithmetica por zero; ora, como ha uma infinidade de progressões, que podem satisfazer a aquella condição, segue-se que ha tambem uma infinidade de systemas de logarithmos: assim o logarithmo de um numero isolado é inteiramente arbitrario, se não se especificarem as duas progressões, que carecterisão o systema de logarithmos, que se tem em vista.

404. Emfim, para legitimar a definição dos logarithmos, seria necessario demonstrar que, se um numero N é introduzido na progressão geometrica por duas inserções differentes, o logarithmo de N é sempre o mesmo.

Se, N tendo sido introduzido na progressão geometrica pela inserção de $(p - 1)$ meios, l é o logarithmo de N; e, N tendo tambem sido introduzido pela inserção de $p' - 1$ meios, l' é o logarithmo de N; cumpriria demonstrar que $l = l'$.

Deixamos ao lector a demonstracção d'esta proposição que

se basea sobre o theorema nº 384, e sobre outro equivalente nas progressões geometricas, que não foi tratado.

Propriedades dos logarithmos.

405. THEOREMA I. *O logarithmo de um producto de muitos factores é igual á somma dos logarithmos dos seos factores.*

Sejão as progressões

$$\because 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots . q^m \ldots . q^n \ldots . q^{m+n} \ldots .$$
$$\div 0 . r . 2r : 3r : \ldots . mr \ldots . nr \ldots . (m+n)r \ldots .$$

que caracterisão um systema qualquer de logarithmos.

Em virtude da definição (nº 401), temos :

$$\log. q^m = mr$$
$$\log. q^n = nr$$

e

$$\log. q^{m+n} = \log. (q^m \times q^n) = (m+n)r;$$

ajuntando as duas primeiras iguadades, temos :

$$\log. q^m + \log. q^n = (m+n)r;$$

logo,

$$\log. q^m \times q^n = \log. q^m + \log. q^n . \qquad o. q. e. n. d.$$

N'esta demonstração suppõe-se que os numeros dados fazem parte da progressão geometrica; se assim não fôr, introduzindo um numero muito grande de meios, poder-se-ha sempre achar dous termos q^p e q^r que differirão dos dous numeros dados em uma quantidade infinitamente pequena, de sorte que passando aos limites, o theorema acima se acha demonstrado para dous numeros quaesquer.

406. O theorema subsiste ainda no caso de muitos factores; com effeito $a \times b \times c \times d$ sendo o producto dado, temos, empregando o theorema precedente:

$$\log. a \times b \times c \times d = \log. a \times (a \times b \times c \times d) = \log. a + \\ + \log. b \times c \times d \;;$$

porém,

$$\log. b \times c \times d = \log. b \times (c \times d) = \log. b + \log. b \times c$$
e $$\log. b \times c = \log. b + \log. c;$$

logo,

$$\log. a \times b \times c \times d = \log. a + \log. b + \log. c + \log. d.$$

407. Theorema II. *O logarithmo de um quociente é igual ao logarithmo do dividendo menos o logarithmo do divisor.*

Seja $\frac{a}{b}$ o quociente dado, pondo

$$\frac{a}{b} = q$$

temos:

$$a = b \times q,$$

e tomando os logarithmos dos dous membros

$$\log. a = \log. b + \log. q,$$

d'onde se deduz:

$$\log. q = \log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b \quad .$$

408. Theorema III. *O logarithmo de uma potencia de um nu-*

mero é igual ao expoente da potencia, multiplicado pelo logarithmo d'esse numero.

Queremos demonstrar que

$$\log.\, a^m = m.\, \log.\, a\, .$$

Com effeito,

$$a^m = \overbrace{a \times a \times a \times a \ldots\ldots\ldots\ldots}^{m};$$

logo,

$$\log.\, a^m = \overbrace{\log. a + \log. a + \log. a + \log. a + \ldots\ldots}^{m},$$

isto é,

$$\log.\, a^m = m.\, \log.\, a^m.$$

409. Theorema IV. *O logarithmo da raiz de um numero é igual ao logarithmo d'esse numero dividido pelo indice da raiz.*

Trata-se de demonstrar que

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log.\, a}{n}\, ;$$

com effeito, pondo

$$\sqrt[n]{a} = r\, ,$$

elevando á potencia de gráo n a igualdade supra,

$$a = r^n\, ,$$

e tomando os logarithmos dos dous membros, temos:

$$\log.\, a = n \log.\, r,$$

d'onde se deduz:

$$\log.\, r = \log.\, \sqrt[n]{a} = \frac{\log.\, a}{n}\, .$$

Observação. Os quatro theoremas precedentes mostrão que uma multiplicação pode ser substituida pela somma de dous logarithmos; uma divisão por uma subtracção; elevação á potencia por uma multiplicação, e uma extracção de raiz por uma divisão; por aqui vê-se a grande vantagem que ha na introducção dos logarithmos nos calculos numericos.

Dos differentes systemas de logarithmos.

410. Da definição dos logarithmos resulta que o logarithmo de 1 é sempre zero. Chama-se *base* de um systema de logarithmos o numero que n'esse systema tem por logarithmo a unidade. Os differentes systemas de logarithmos se distinguem pela sua base; uma vez a base determinada, o systema tambem se acha determinado; existe porém uma relação importante entre todos os differentes systemas de logarithmos, relação expressa pelo theorema seguinte:

411. THEOREMA. *A razão dos logarithmos de dous numeros é constante em todos os systemas.*

Sejão M e N dous numeros, e $\frac{m}{n}$ a razão de seos logarithmos, tomados em um systema de base b, de modo que:

$$\frac{\text{log. M}}{\text{log. N}} = \frac{m}{n},$$

isto é,

$$n \times \text{log. M.} = m \times \text{log. N},$$

ou

$$\text{log. M}^n = \text{log. N}^m;$$

d'onde se deduz

$$\text{M}^n = \text{N}^m;$$

porém, em outro qualquer systema de base b' se tem sempre

$$\log. M^n = \log. N^m,$$

ou

$$n. \log. M = m. \log. N,$$

ou

$$\frac{\log. M}{\log. N} = \frac{m}{n},$$

o que exprime que a razão dos dous logarithmos é sempre a mesma.

Observação. Na demonstração que acabámos de dar do theorema precedente suppomos commensuravel a razão dos dous logarithmos; porém será facil generalisal-o, empregando-se o raciocinio costumado. O theorema subsistindo para dous numeros, cuja razão dos logarithmos differe pouco da razão dos logarithmos dos numeros dados, subsiste logo que se passar aos limites.

412. Corollario. *Conhecendo-se os logarithmos dos numeros no systema de base* b, *obtem-se os logarithmos d'esses mesmos numeros em outro systema de base* b', *multiplicando-se os primos por uma razão constante.*

Sejão M e N dous numeros cujos logarithmos no systema de base b são $\log._b$ M e $\log._b$ N, e no systema de base b', $\log._{b'}$ M, e $\log._{b'}$ N; em virtude do theorema precedente, temos:

$$\frac{\log._b M}{\log._b N} = \frac{\log._{b'} M}{\log._{b'} N},$$

ou

$$\frac{\log._b M}{\log._{b'} M} = \frac{\log._b N}{\log._{b'} N} = \mu,$$

d'onde se deduz :

$$\log._b M = \mu \log._{b'} M$$

ou

$$\log._b N = \mu \log._{b'} N;$$

assim, para obter-se o logarithmo de M ou de N no systema de base b, basta multiplicar por um numero constante μ os logarithmos d'esses numeros no systema de base b'.

Logarithmos de Briggs.

413. *Logarithmos de Briggs* ou *logarithmos vulgares* são os logarithmos definidos pelas progressões seguintes :

$$\div\div 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : \ldots\ldots$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots ;$$

e o systema de logarithmos cuja base é 10 é o unico empregado nos calculos numericos.

414. *O logarithmo de uma potencia qualquer de* 10 *é o expoente d'essa potencia.*

Com effeito

$$\log. 10^n = n. \log. 10 = n$$

por isso que $\log. 10 = 1$.

415. *Os logarithmos de todos os numeros que não são potencias de* 10, *são incommensuraveis.*

Seja N um numero, cujo logarithmo supposto commensuravel é $\frac{m}{n}$; da igualdade

$$\log. N = \frac{m}{n},$$

deduz-se successivamente :

$$n. \log. N = m, \quad \log. N^n = m = \log. 10^m,$$

e finalmente

$$N^n = 10^m;$$

10^m é um numero inteiro, logo N^n deve ser um numero inteiro, e por conseguinte N; como 10^n não contém outros factores senão 2 e 5, é claro que N^n e em seguida N não deve conter outros factores senão 2 e 5. Ponhamos pois

$$N = 2^p . 5^q;$$

logo,

$$N^n = 2^{p.n}\, 5^{q.n} = 10^m = 2^m . 5^m,$$

d'onde se deduz :

$$p. n = m, \quad q. n = m,$$

e em seguida

$$p = q.$$

Assim, N é uma potencia de 10. Logo, as potencias de 10 são os unicos numeros que teem logarithmos commensuraveis; os logarithmos dos outros numeros são approximados abaixo de uma unidade decimal de septima ordem para mais ou para menos.

416. Dá-se o nome de *caracteristica* á parte inteira de um logarithmo.

A caracteristica do logarithmo de um numero maior que a unidade contem tantas unidades menos uma, quantos são os algarismos da parte inteira d'esse numero.

Todo numero de n algarismos é comprehendido entre 10^{n-1} e 10^n; o logarithmo d'esse numero é comprehendido entre $(n-1)$ e n, e tem $(n-1)$ unidades na sua parte inteira.

417. *Conhecendo-se o logarithmo de um numero, obtem-se o logarithmo de um numero* 10^n *vezes maior ou* 10^n *vezes menor augmentando-se ou diminuindo-se sua caracteristica de* n *unidades.*

Com effeito, multiplicando um numero A por 10^n, temos :

$$\log.\ (A \times 10^n) = \log.\ A + \log.\ 10^n = \log.\ A + n\ ;$$

dividendo A por 10^n, temos :

$$\log.\ \frac{A}{10^n} = \log.\ A - \log.\ 10^n = \log.\ A - n\ .$$

Assim, quando dous numeros decimaes não differem senão pelo lugar que occupa a virgula, seos logarithmos teem mesma parte decimal e só differem pela caracteristica.

Disposição das taboas de logarithmos de Callet.

418. As taboas não dão as caracteristicas dos logarithmos; pois, como sabemos, a simples inspecção do numero basta para determinar sua caracteristica; nas taboas só se encontrão as partes decimaes dos logarithmos.

As taboas de Callet contém os logarithmos dos numeros desde 1 até 108000. Nas cinco primeiras paginas sob o titulo de *Chiliade I* (reunião de mil unidades) se achão os logarithmos dos numeros naturaes desde 1 até 1200, avaliados com 8 algarismos decimaes, logarithmos, que estão em face dos numeros aos quaes correspondem. Nas columnas intituladas N (inicial da palavra numero) se achão os numeros, e nas columnas intituladas *log.* os logarithmos.

Depois, as taboas tomão outra disposição, e dão os logarithmos dos numeros desde 1200 até 100000 calculados com 7 algarismos decimaes; de 100000 até 108000 os logarithmos

são, como no começo das taboas, calculados com 8 algarismos decimaes.

Depois da chiliade I, a columna N contem todos os numeros desde 1020 até 18000, e a columna seguinte, intitulada 0, contém os logarithmos correspondentes; n'esta columna os numeros isolados de 3 algarismos que se achão á sua esquerda são considerados como escriptos uns sob os outros de maneira a completar todas as linhas.

Nas columnas intituladas 1, 2, 3......9 se achão numeros de 4 algarismos, que estão na mesma linha horizontal com os numeros da columna N; aquelles numeros de 4 algarismos substituidos aos outros tambem de 4 algarismos, que se achão á direita da columna 0, são os logarithmos dos numeros da columna N seguido do algarismo que serve de titulo á columna vertical considerada.

Emfim, existe uma ultima columna intitulada *diff.*, que quer dizer *differença ;* cada uma d'essas columnas se compõe de um numero isolado, situado no seo alto, e que se chama *differença tabular ;* esses numeros isolados são as differenças dos logarithmos de dous numeros inteiros consecutivos. Á esquerda do traço vertical que está debaixo d'esse numero se achão os numeros 1, 2, 3 .... 9, e á direita os productos da differença por 0,1, 0,2, 0,3 ..... e 0,9.

Para se poder applicar os logarithmos ás questões numericas é necessario saber-se resolver os dous problemas seguintes: 1º *Dado um numero, determinar seo logarithmo ;* — 2º *Dado o logarithmo de um numero, determinar esse numero.*

Uso das taboas de logarithmos.

PROBLEMA I.

Determinar o logarithmo de um numero dado.

419. PRIMEIRO CASO. *O numero dado consta de cinco algarismos.*

Seja proposto, por exemplo, o numero 43678 ; procura-se na columna intitulada N o numero 4367 e á direita na columna 0 tomão-se os tres algarismos isolados 640, á direita dos quaes se escrevem os quatro outros 2528 que se achão justamente na intersecção da linha horizontal, em que está o numero dado, com a linha vertical, onde está o ultimo algarismo 8 do numero dado ; assim 4 sendo a caracteristica, temos

$$\log.\ 43678 = 4,6402528.$$

Segundo caso. *O numero dado é qualquer.*

Seja em geral N o numero dado. Separa-se por meio da virgula no numero N cinco algarismos á esquerda ; seja n esse numero e d a fracção decimal resultante ; é claro que a parte decimal do logarithmo de N é a mesma que a do logarithmo do numero N modificado, que é da forma $n + d$.

Procura-se nas taboas o logarithmo de n (1º caso), seja l esse logarithmo. O logarithmo do numero $(n + d)$ é comprehendido entre l e l' ; l' sendo o logarithmo do numero inteiro superior a n em uma unidade.

Principio. *Os accrescimos logarithmicos são proporcionaes aos accrescimos numericos e reciprocamente.*

Este principio não é verdadeiro rigorosamente, como veremos, porém pode ser empregado sem erro sensivel.

Pondo a differença $l' - l = \delta$, que é o accrescimo logarithmico correspondente á unidade, e apoiando-nos no principio precedente, temos :

$$\frac{x}{\delta} = \frac{d}{1},$$

d'onde se deduz :

$$x = d \times \delta;$$

assim, *para obter-se* x, *isto é, o accrescimo logarithmico cor-*

respondente á parte decimal d, *basta multiplicar-se por* d *a differença tabular* δ.

Desprezando-se n'este producto os algarismos que não influem sobre o septimo algarismo decimal, e ajuntando-se convenientemente o numero resultante com a parte decimal do logarithmo de n, obtem-se a parte decimal do logarithmo do numero dado, ao qual se dá depois a competente caracteristica.

Seja proposto, como applicação do que acabámos de dizer, determinar o logarithmo do numero 346,78267.

Em lugar de considerarmos o numero proposto, cujo logarithmo tem por caracteristica 2, consideraremos o numero 34658,267.

$$\begin{array}{rl} \log.\ 34658 = \ldots\ldots & 4{,}5398035 \\ \log.\ 34659 = \ldots\ldots & 4{,}5398160 \\ \hline 1 & \delta = 125 \end{array}$$

Multiplicando 0,267 por 125 temos por producto 33,375, que é o accressimo logarithmico correspondente á 0,267; desprezando os tres ultimos algarismos decimaes e ajuntando 33 com 5398035, logarithmo de 34658, temos

$$\log.\ 346{,}78267 = 2{,}5398068.$$

Eis como se opera na pratica, empregando-se a ultima columna *diff.* :

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 34658 & = \ldots & 4{,}5398035 \\ \text{por}\quad 0{,}2 & = \ldots\ldots\ldots & 25 \\ \text{por}\quad 0{,}06 & = \ldots\ldots\ldots & 7{,}5 \\ \text{por}\quad 0{,}007 & = \ldots\ldots\ldots & 0{,}88 \\ \hline \log.\ 34658{,}267 & = \ldots & 4{,}539806838, \end{array}$$

e $$\log.\ 346{,}58267 = \ldots\ 2{,}5398068$$

PROBLEMA II.

DETERMINAR O NUMERO CORRESPONDENTE A UM LOGARITHMO DADO.

420. Primeiro caso. *O logarithmo dado é um logarithmo das taboas.*

Seja por exemplo 7931895 o logarithmo dado. Procurão-se na columna 0 os tres algarismos isolados 793, e á direita d'esse numero ou mais abáixo nas columnas 1, 2, 3 ..... 9 os algarismos 1895 ; obtem-se o numero buscado escrevendo-se 4, algarismo que se acha no alto da columna vertical considerada, á direita do numero 6211, que se acha na columna N e na mesma linha horizontal com os algarismos 1895.

Segundo caso. *O logarithmo dado é qualquer.*

Seja em geral L um logarithmo dado, de que se busca o numero correspondente. Se L não se acha nas taboas, é comprehendido entre dous logarithmos consecutivos l e l', dos quaes sejão n e $n+1$ os numeros correspondentes; chamando δ a differença $l'-l$, Δ a differença $L-l$, e fundando-nos no principio (nº 419 — Princip.), temos :

$$\frac{x}{1}=\frac{\Delta}{\delta} \text{ ou } x=\frac{\Delta}{\delta}.$$

Assim, *para obter-se* x *ou o accrescimo numerico, correspondente ao accrescimo logarithmo* Δ, *basta dividir-se* Δ *pela differença tabular* δ.

Ajuntando-se a n o valor de x, convertido em decimaes, e separando-se por meio da virgula a parte inteira do numero segundo a caracteristica do logarithmo dado, obtem-se o numero pedido.

Appliquemos a um exemplo o que acabámos de expôr de uma maneira geral. Proponha-se procurar o numero correspondente ao logarithmo 2,4674325.

Procurão-se nas toboas os dous logarithmos 4674305, 4674453, immediatamente inferior e immediatamente superior ao logarithmo dado, e ao mesmo tempo os numeros correspondentes que são 29338 e 29339. Fazendo as subtracções :

$$\begin{array}{ll} l' = 2,4674453 & L = 2,4674325 \\ l = 2,4674305 & l = 2,4674305 \\ \hline \delta = l' - l = \ldots\ 148\ , & \Delta = L - l = \ldots\ 20 \end{array}$$

temos :

$$x = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{20}{148} = 0,135 \;;$$

Ajuntando 0,135 á 29338, numero correspondente ao logarithmo immediatamente inferior ao logarithmo dado, teremos os algarismos significativos 29338135 do numero buscado ; em seguida o numero buscado é 293,38135, visto ser 2 a caracteristica do logarithmo dado.

Eis como se opera na pratica, empregando-se a columna das differenças :

$$\begin{array}{llr} & 2,4674325 & \\ \text{por} & 2,4674305 \ldots\ldots\ldots & 29338 \\ \hline & \text{Resto} \ldots 20 & \\ \text{por} & \ldots\ldots 15 \ldots\ldots\ldots & 0,1 \\ \text{por} & \ldots\ldots 44 \ldots\ldots\ldots & 0,03 \\ \text{por} & \ldots\ldots 60 \ldots\ldots\ldots & 0,004 \\ \hline \end{array}$$

2,4674325 corresponde á 293,38 134

Toma-se o logarithmo 2,4674305 immediatamente inferior ao logarithmo dado, e ao mesmo tempo o numero 29338 correspondente á aquelle logarithmo ; a differença dos dous logarithmos dá um resto 20. Procura-se depois na taboa *diff.* mais proxima e na columna á direita do risco o numero immediata-

mente inferior a 20, esse numero é 15, que corresponde a 0,1. Diminuindo-se 15 de 20, resta 5, que multiplicado por 10 dá 50; procura-se de novo na mesma columna á direita o numero mais proximo de 50, acha-se 44, que corresponde a 0,03. Diminuindo-se 44 de 50, resta 6, que multiplicado por 10 dá 60; procura-se ainda o numero mais proximo por defeito ou por excesso de 60, acha-se 59, que corresponde a 0,004.

Addicionando tudo, e tendo em vista a caracteristica, obtem-se o numero 293,38134, correspondente ao logarithmo dado.

Observações importantes.

421. I. Só definimos os logarithmos dos numeros maiores que a unidade, e até aqui só temos considerado semelhantes logarithmos. Por conseguinte, segundo nossas definições, é necessario que todos os numeros satisfação aquella condição; assim, tendo de procurar o logarithmo de um numero menor que a unidade, devemos tornal-o antes maior que a unidade, multiplicando-o por uma potencia conveniente de 10; feito isto, opera-se da maneira conhecida, e divide-se o resultado, ao qual se chega, por aquella potencia de 10.

II. Quando se tem de diminuir de um numero qualquer um ou muitos logarithmos, empregão-se algumas vezes os complementos d'esses logarithmos, que se ajuntão ao numero proposto; porém, como sabemos, do resultado devem-se diminuir tantas vezes 10, quantos logarithmos se subtrahirão.

III. Quando o numero que se busca depende de multiplicações, divisões, potencias, e raizes, procura-se o seo logarithmo, e d'este passa-se ao numero, como sabemos.

Proponha-se calcular a seguinte expressão:

$$x = \sqrt[3]{\frac{0,348 \times 5}{7 \times \pi}}$$

Multiplicando esta igualdade por 10^n, temos:

$$x \times 10^n = 10^n \times \sqrt[3]{\frac{348 \times 5}{1000 \times 7 \times \pi}} = \frac{10^n}{\sqrt[3]{\frac{1000 \times 7 \times \pi}{348 \times 5}}}$$

e tomando os logarithmos dos dous membros

$$\log.(x \times 10^n) = n - \frac{1}{3}(\log. 1000 + \log. 7 + \log. \pi +$$
$$+ c^t \log. 348 + c^t \log. 5 - 20).$$

Eis o typo do calculo :

log. 1000 =	. . . .	3,0000000
log. 7 =	. . . .	0,8450980
log. π = log. 3,1416	. . . .	0,4971509
log. 348 = 2,5415792		
c^t log. 348 = 7,4584208	. . . .	7,4584208
log. 5 = 0,6989700		
c^t log. 5 = 9,3010300	. . . .	9,3010300
		21,1016997

$$\log.(x \times 10^n) = n - \frac{1}{3}(1,1016997) = n - 0,3672332 .$$

Tomando $n = 1$, a subtracção do segundo membro pode ser effectuada e temos finalmente

$$\log.(x \times 10) = 0,6327668$$

Calculo do numero correspondente :

0,6327668		
0,6327609	. . . .	42930
Resta . . . 59		
por . . . 51	. . . .	0,5
por . . . 80	. . . .	0,08
$x \times 10 =$	. . . .	4,293058

por conseguinte

$$x = 0,4293058.$$

IV. Observando-se nas taboas as columnas das differenças, vê-se que essas differenças vão sempre diminuindo; a razão é por que se n e $n+1$ são dous numeros consecutivos, a differença dos logariihmos d'esses numeros é

$$\log.(n+1) - \log.n = \log.\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log.\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ora, á medida que n cresce, a quantidade $1+\frac{1}{n}$ diminue e tende para a unidade, e a differença dos dous logarithmos tende para zero.

V. Os accressimos logarithmicos não são proporcionaes aos accressimos numericos. Com effeito se a um numero n damos um accressimo h, o logarithmo experimentará um accressimo expresso pela differença seguinte:

$$\log.(n+h) - \log.n = \log.\left(\frac{n+h}{n}\right) = \log.\left(1+\frac{h}{n}\right).$$

Ora, esta differença diminue, á medida que n cresce; por conseguinte h ficando constante; isto é, o accressimo numerico sendo constante, o accressimo logarithmico diminue e não lhe é proporcional. A differença de dous logarithmos consecutivos nas taboas é muitas vezes a mesma durante muitas paginas, logo para os numeros inteiros comprehendidos n'essas paginas é evidente que o accressimo dos logarithmos é proporcional ao dos numeros.

EXERCICIOS.

I. *Calcular por logarithmos as expressões seguintes :*

$$\frac{7634537}{76781}\ ,\quad 14{,}2768 + 4{,}5678$$

II. *Calcular por logarithmos as expressões seguintes :*

$$(3{,}1416)^2\ ,\quad 3{,}1416 \times \sqrt[5]{237}$$

III. *Calcular por logarithmos as expressões seguintes :*

$$x = \left(\frac{2764 \times 47{,}678}{346 \times 278}\right)^3,\ x = \left[\frac{4{,}678 \times (23764)^2}{27 \times 426}\right]^3$$

IV. *Calcular por logarithmos as expressões seguintes :*

$$x = \left(\sqrt[5]{\frac{67432}{5{,}678}}\right)^2,\ x = \left(\sqrt[3]{\frac{467{,}328}{52^2}}\right)^4$$

V. *Calcular por logarithmos a expressão seguinte :*

$$x = \frac{1}{42{,}7 \times (25)3} \times \left(\sqrt[3]{\frac{276{,}4 \times 25^2}{76 \times 2{,}4}}\right)^5$$

LIVRO VIII.

Applicações.

CAPITULO PRIMEIRO.

APPLICAÇÕES DA THEORIA DAS RAZÕES.

Das grandezas directa e inversamente proporcionaes.

422. Logo que duas grandezas se achão ligadas pelo enunciado de um problema de tal modo, que dous valores da primeira estejão na mesma razão que dous valores correspondentes da segunda, ellas são ditas *proporcionaes* ou *directamente proporcionaes.*

Assim quando se diz, por exemplo, que o preço de um metal é proporcional ao seo peso, deve-se entender que, tomando-se dous pesos differentes do metal e os seos preços correspondentes, a razão dos pesos é igual á razão dos preços.

Duas grandezas são ditas *inversa* ou *reciprocamente proporcionaes*, logo que dous valores da primeira se achão em razão inversa com os dous valores correspondentes da segunda.

Assim quando se diz que a velocidade de um corpo, que se

move uniformemente, é inversamente proporcional ao tempo empregado pelo corpo para percorrer um espaço determinado, deve-se entender que dous valores differentes da velocidade estão em razão inversa com os dous valores correspondentes do tempo.

423. A demonstração da proporcionalidade das grandezas não pertence á Arithmetica, porém a cada sciencia em particular que as considera; admittimos essa proporcionalidade, de que faremos uso nas soluções dos problemas que temos de resolver. No entretanto vamos indicar dous theoremas que servirão para reconhecer, se duas grandezas varião em razão directa ou inversa.

424. THEOREMA I. *Se duas grandezas são taes, que uma d'ellas vindo a ser certo numero de vezes maior ou menor, a outra venha a ser esse mesmo numero de vezes maior ou menor, ellas são directamente proporcionaes.*

Sejão A e B as duas grandezas dadas; por hypothese A vindo a ser m vezes maior ou menor, B vem a ser tambem m vezes maior ou menor.

Trata-se de demonstrar que, quaesquer que sejão os valores de A, multiplicando-os por um numero fraccionario $\frac{m}{n}$, os valores correspondentes de B serão tambem multiplicados por $\frac{m}{n}$.

Multiplicar A por $\frac{m}{n}$ é tornal-o m vezes maior, e n vezes menor; porém A vindo a ser $A \times m$, B vem a ser por hypothese $B \times m$; se esse novo valor de A vem a ser n vezes menor, isto é $\frac{A \times m}{n}$, o valor correspondente de B virá a ser, por hypothese, n vezes menor, isto é, $\frac{B \times m}{n}$; ora, é claro que as duas razões

$$\frac{A \times \frac{m}{n}}{A}, \quad \frac{B \times \frac{m}{n}}{B}$$

são iguaes; logo A e B são duas grandezas proporcionaes em virtude da definição (nº 422).

O ganho de um obreiro é proporcional ao numero dos dias de seo trabalho; por que quanto mais trabalhar, mais ganhará necessariamente.

425. Theorema II. *Se duas grandezas são taes que uma d'ellas vindo a ser certo numero de vezes maior ou menor, a outra venha a ser esse mesmo numero de vezes menor ou maior, essas grandezas são inversamente proporcionaes.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o precedente.

O numero das horas de trabalho, por dia, de um obeiro para fazer uma obra, é inversamente proporcional ao tempo empregado; porque, quanto maior fôr o numero de horas, menos tempo será necessario para fazer a mesma obra.

Observação. Uma grandeza pode ser ligada pelo enunciado de uma questão a muitas outras, sendo proporcional a umas e universamente proporcional a outras.

Por exemplo, o preço de um cylindro, formado de prata e cobre, é proporcional á quantidade de prata e inversamente proporcional á quantidade de cobre, o volume do cylindro sendo sempre o mesmo. A quantidade de prata sendo constante, a de cobre variando assim como as dimensões do cylindro, será facil ver-se que o preço será proporcional ás dimensões do cylindro e inversamente proporcional á quantidade de cobre, etc.

Regra de tres simples.

426. *Regra de tres simples é toda questão que tem por fim, conhecendo-se os valores de duas grandezas que varião na mesma razão ou em razão inversa, determinar o novo valor de uma d'ellas, quando a outra toma outro valor determinado.*

Se as duas grandezas dadas varião na mesma razão, a regra de tres simples é *directa*, e no outro caso *inversa*.

Vamos tratar a questão de uma maneira geral, applicando depois o que tivermos dito a alguns exemplos.

Sejão M e N as duas grandezas dadas, m e n seos valores respectivos; trata-se de determinar o valor que tomará M, logo que N em lugar de n tomar outro valor n'; represente x o valor buscado

M,	N
m	n
x	n'.

Ha duas maneiras de resolver-se esta questão.

I. *Por meio das razões.* Se as duas grandezas M, e N são directamente proporcionaes, a regra de tres é directa, e temos a seguinte proporção :

$$\frac{x}{m} = \frac{n'}{n} \quad (\text{n}^\circ\ 422),$$

d'onde se deduz :

$$x = m \times \frac{n'}{n};$$

se as duas grandezas dadas são inversamente proporcionaes, a regra de tres é inversa, e temos

$$\frac{x}{m} = \frac{n}{n'},$$

d'onde se deduz :

$$x = m \times \frac{n}{n'}.$$

II. *Reducção á unidade.* Supponhamos proporcionaes as grandezas dadas. Quando N tem por valor n, M tem por valor cor-

respondente m; se N toma um valor n vezes menor; isto é, a unidade, o valor de M vem a ser tambem n vezes menor (nº 424); isto é $\frac{m}{n}$; se N toma um valor n' vezes maior; isto é, $1 \times n'$, o valor de M será tambem n' vezes maior; isto é $\frac{m}{n} \times n'$ ou $m \times \frac{n'}{n}$, resultado obtido pelo primeiro methodo.

Se M e N são inversamente proporcionaes; logo que N tem por valor n, M tem por valor m, e logo que N tem por valor 1, M tem por valor $m \times n$ (nº 425); se N tomar um valor n' vezes maior; isto é $1 \times n'$ ou n', M tomará um valor n' vezes menor; isto é, $\frac{m \times n}{n'}$ ou $m \times \frac{n}{n'}$ (nº 425), resultado obtido pelo primeiro methodo.

Problema I. *Um bastão de 8 pés dá uma sombra, cujo comprimento é de 7 pés; uma torre no mesmo momento dá uma sombra de 203 pés, pergunta-se a altura da torre.*

Será facil ver-se que esta questão é uma regra de tres directa; empregando os raciocinios acima, e x representando a altura buscada, teremos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{8} = \frac{203}{7};$$

d'onde se deduz:

$$x = \frac{8 \times 203}{7} = 232 \text{ pés.}$$

Problema II. *Dezoito obreiros fizerão uma obra em 15 dias; quantos obreiros farão a mesma obra em 9 dias?*

Recorrendo sempre aos dous theoremas (nºˢ 424, 425) vê-se facilmente que esta questão é uma regra de tres inversa; x representando o numero de obreiros buscado, temos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{18} = \frac{15}{9};$$

d'onde se deduz :

$$x = \frac{18 \times 15}{9} = 30 .$$

Os dous problemas supra, assim como todas as questões d'este genero, podem ser resolvidos pelo methodo da reducção á unidade (nº 426 — II), o que não offerece difficuldade alguma.

Regra de tres composta.

427. *Regra de tres composta é toda questão que tem por fim, conhecendo-se o valor de uma grandeza, assim como os valores correspondentes de muitas outras grandezas, ás quaes a primeira é directa ou inversamente proporcional, determinar o valor que tomará a primeira grandeza logo que as outras tomarem outros valores determinados.*

Seja

$$\begin{array}{ll} K & A,\ B,\ C......P,\ Q,\ R...... \\ k & a,\ b,\ c......p,\ q,\ r...... \\ x & a',\ b',\ c'......p',\ q',\ r'...... \end{array}$$

K a grandeza dada que suppomos proporcional a A, B, C, etc., e inversamente proporcional a P, Q, R, etc. ; logo que K tem por valor k, A, B, C ...... P, Q, R ...... teem por valores a, b, c .... p, q, r ..... ; trata-se de determinar o novo valor x de K, logo que as outras grandezas em lugar de $a, b, c ...... p, q, r$ ...... tomarem os valores a', b', c' ...... p', q', r' ......

Resolve-se esta questão geral pelos dous methodos empregados na regra de tres simples.

I. *Por meio das razões.* Em lugar de determinarmos x fazendo variar todas as grandezas simultaneamente, procuraremos os valores que K tomará fazendo variar successivamente cada

uma das grandezas dadas e conservando ás outras seos valores primitivos. Operando assim, teremos o valor de x logo que tivermos feito variar todas as grandezas successivamente até a ultima.

Posto isto, seja x_0 o valor que K toma, logo que A toma o valor a', as outras grandezas B, C....P, Q, R.... conservando seos valores primitivos b, c, ... p, q, r .... ; seja x_1 o novo valor que K toma, logo que A tendo o valor a', B tem o valor b' em lugar de b, as outras grandezas conservando seos valores primitivos; do mesmo modo sejão x_2, x_3, x_4..... os valores differentes que K toma, á medida que as grandezas varião successivamente ; e x o valor final, valor buscado que K toma, logo que todas as grandezas tiverem variado até á ultima.

K sendo directamente proporcional á A, B, C...... e inversamente proporcional á P, Q, R...... teremos, em virtude do que acima dissemos, as seguintes proporções :

$$\frac{x_0}{k} = \frac{a'}{a}$$

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{c'}{c}$$

. . . . .

. . . . .

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{p}{p'}$$

$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{q}{q'}$$

$$\frac{x}{x_4} = \frac{r}{r'}$$

. . . . .

. . . . . ;

multiplicando essas igualdades membro a membro, temos :

$$\frac{x}{k} = \frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} \times \frac{c'}{c} \times \ldots\ldots \times \frac{p}{p'} \times \frac{q}{q'} \times \frac{r}{r'} \times \ldots\ldots$$

ou escrevendo de outro modo :

$$\frac{x}{k} = \frac{\frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} \times \frac{c'}{c} \times \ldots\ldots}{\frac{p'}{p} \times \frac{q'}{q} \times \frac{r'}{r} \times \ldots\ldots},$$

resultado que se enuncia da maneira seguinte :

428. *Em toda questão de regra de tres composta a razão da incognita á quantidade que lhe é correspondente, é igual ao producto das razões entre as quantidades que são directamente proporcionaes á incognita, dividido pelo producto das razões entre as quantidades inversamente proporcionaes.*

II. *Reducção á unidade.* Quando A, B, C, ... P, Q, R, ... teem os valores $a, b, c \ldots\ldots p, q, r \ldots\ldots$, K tem o valor k; quando A toma um valor a vezes menor; isto é a unidade, intactas as outras grandezas, o valor de K vem a ser tambem a vezes menor isto é $\frac{k}{a}$, e se A toma um valor a' vezes maior isto é $1 \times a'$ ou a', o valor de K vem a ser $\frac{k}{a} \times a'$ ou $k \times \frac{a'}{a}$.

K sendo ainda directamente proporcional a B terá um valor b vezes menor se B tem por valor a unidade, e um valor b' vezes maior, se o valor de B torna-se b'; o valor de k será pois $k \times \frac{a' \times b'}{a \times b}$.

K sendo tambem directamente proporcional a C terá por valor $k \times \frac{a' \times b' \times c'}{a \times b \times c}$, logo que se passar de c a c'.

K sendo inversamente proporcional a P tem um valor p vezes maior logo que P tem um valor p vezes menor ou a unidade, e

o valor de K vem a ser p' vezes menor quando o de P se torna p' vezes maior; o valor de K é pois $k \times \frac{a' \times b' \times c' \times p}{a \times b \times c \times p'}$.

Pela mesma razão passando do valor q de Q ao valor q', o valor de K será $k \times \frac{a' \times b' \times c' \times p \times q}{a \times b \times c \times p' \times q'}$.

Emfim, o valor r de R vindo a ser r', o valor de K, que é inversamente proporcional á R, será

$$k \times \frac{a' \times b' \times c' \times p \times q \times r}{a \times b \times c \times p' \times q' \times r'} = k \times \frac{\frac{a'}{a} \times \frac{b'}{b} \times \frac{c'}{c} \times \ldots}{\frac{p'}{p} \times \frac{q'}{q} \times \frac{r'}{r} \times \ldots}$$

mesmo resultado, obtido pelo primeiro methodo.

Appliquemos a theoria á um exemplo.

Problema I. *Em 25 dias 36 obreiros trabalhando 10 horas por dia cavárão um buraco com 60^m de comprimento, 3^m de largura e 4^m de profundeza. Quantos obreiros serão precisos trabalhando 12 horas por dia para cavarem em 18 dias um buraco com 75^m de comprimento, 2^m,5 de largo e 3^m,2 de fundo. Suppõe-se que a difficuldade do primeiro trabalho está para a do segundo como 6 está para 7, e a força de um obreiro da primeira companhia está para a de um obreiro da segunda como 5 está para 4.*

Escrevamos em linhas horizontaes as grandezas da questão com os seos valores correspondentes, x representando o numero de obreiros buscado.

Obreiros.—	Horas (i).—	Dias (i).—	Comprimento (d).—	Largura (d).—	Profundeza (d).—	Difficuldade (d).—	Força (i).
36^{ob}	10^h	25^d	60^m	3^m	4^m	6	5
x	12	18	75	2,5	3,2	7	4

Primeiro methodo. Determinemos o numero de obreiros necessario fazendo variar somente as horas, as outras condições

do problema ficando as mesmas; seja x_0 esse numero. Teremos a seguinte proporção :

$$\frac{x_0}{36}=\frac{10}{12}$$

por isso que essas grandezas são inversamente proporcionaes. Poder-se-hia calcular immediatamente o valor x_0, porém não o fazemos; nos serviremos no entretanto de x_0, como se fosse um numero.

Seja x_1 o numero de obreiros necessario trabalhando 12 horas por dia, logo que em lugar de 25 dias trabalhão somente 18; como são ainda duas grandezas inversamente proporcionaes, temos a seguinte proporção :

$$\frac{x_1}{x_0}=\frac{25}{18}.$$

x_1 é pois o numero de obreiros trabalhando 10^h por dia e durante 18 dias, as outras condicções do problema ficando as mesmas.

Fazendo variar o comprimento, x_2 representando o novo numero de obreiros, e essas grandezas sendo directamente proporcionaes, temos a seguinte proporção :

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{75}{60},$$

x_2 é o numero de obreiros preciso trabalhando 12^h por dia durante 18 dias para cavarem um buraco com 75^m de comprimento, 3^m de largo, etc., as outras condicções do problema ficando as mesmas.

Seja x_3 o novo numero de obreiros preciso logo que em lugar de 3^m de largo ha somente $2^m,5$; como essas grandezas são directamente proporcionaes, temos a seguinte proporção :

$$\frac{x_3}{x_2}=\frac{2,5}{3};$$

x_4 sendo o novo numero de obreiros, logo que a profundeza varia, temos pela mesma razão

$$\frac{x_4}{x_3} = \frac{3,2}{4}.$$

Fazendo variar a difficuldade, temos pela mesma razão

$$\frac{x_5}{x_4} = \frac{7}{6}$$

x_5 disignando o numero de obreiros preciso trabalhando 12 horas por dia durante 18 dias para cavarem um buraco com 75 metros de comprimento, $2^m,5$ de largo, $3^m,2$ de fundo, a difficuldade sendo 7, e a força de cada obreiro sendo representada por 5.

Em fim buscamos qual o numero de obreiros preciso para fazerem esse mesmo trabalho com a unica differença que a força de cada obreiro seja representada por 4; como são grandezas inversamente proporcionaes, temos a proporção :

$$\frac{x_5}{x} = \frac{5}{4}$$

x designando o numero de obreiros buscado, isto é, a incognita.

Temos sete proporções, de que depende o valor de x ; para obtel-o, multiplicando essas igualdades membro a membro

$$\frac{x}{36} = \frac{10 \times 25 \times 75 \times 2,5 \times 3,2 \times 7 \times 5}{12 \times 18 \times 60 \times 3 \times 4 \times 6 \times 4},$$

e supprimindo os factores communs, temos :

$$x = 50,636 \ldots\ldots$$

O resultado fraccionario, a que chegamos, significa que 50 obreiros farião um pouco menos e 51 um pouco mais do trabalho proposto.

Segundo methodo. Para cavar-se certo buraco determinado

são precisos 36 obreiros trabalhando 10^h por dia, ou 36×10 obreiros trabalhando uma hora por dia, e $\frac{36 \times 10}{12}$ obreiros trabalhando 12^h por dia.

$\frac{36 \times 10}{12}$ obreiros são precisos para cavarem um buraco trabalhando 12^h por dia e durante 25 dias; para fazer a mesma obra durante 1 dia seria necessario um numero de obreiros 25 vezes maior e para fazel-a em 18 dias, 18 vezes menor isto é $\frac{36 \times 10 \times 25}{12 \times 18}$.

O buraco feito pelos $\frac{36 \times 10 \times 25}{12 \times 18}$ obreiros teria 60^m de comprimento ; se tivesse um metro de comprimento seria necessario um numero de obreiros 60 vezes menor e como deve ter 75 metros, é necessario um numero 75 vezes maior, isto é um numero de obreiros igual a $\frac{36 \times 10 \times 25 \times 75}{12 \times 18 \times 16}$.

O buraco feito por este ultimo numero de obreiros teria 3^m de largo; se tivesse 1^m de largo, o numero de obreiros necessario seria 3 vezes menor, mas devendo ter $2^m,5$, o numero de obreiros deve ser $2^m,5$ maior, isto é $\frac{36 \times 10 \times 25 \times 75 \times 25}{12 \times 18 \times 60 \times 3}$.

Este ultimo numero de obreiros teria feito um buraco de 4^m de fundo, porém o buraco devendo ter $3^m,2$, o numero de obreiros necessario será $\frac{36 \times 10 \times 25 \times 75 \times 2,5 \times 3,2}{12 \times 18 \times 60 \times 3 \times 4}$.

O buraco feito por este ultimo numero de obreiros seria em um terreno de difficuldade representada por 6; se a difficuldade fosse 1, seria necessario um numero de obreiros 6 vezes menor; porém, como ella é 7, é necessario um numero de obreiros 7 vezes maior; isto é $\frac{36 \times 10 \times 25 \times 75 \times 2,5 \times 3,2 \times 7}{12 \times 18 \times 60 \times 3 \times 4 \times 6}$

A força de cada obreiro sendo representada por 5 é necessario

$$\frac{36 \times 10 \times 25 \times 75 \times 2,5 \times 3,2 \times 7}{12 \times 18 \times 60 \times 3 \times 4 \times 6}$$

obreiros para fazerem a dita obra; se a força fosse 1, seria necessario um numero de obreiros 5 vezes maior; porém, como ella é 4, é necessario um numero 4 vezes menor; isto é, $\frac{36 \times 10 \times 25 \times 75 \times 2,5 \times 3,2 \times 7 \times 5}{12 \times 18 \times 60 \times 3 \times 4 \times 6 \times 4}$, resultado obtido pelo primeiro methodo.

429. Ainda para mais exercicio appliquemos a esta questão a formula geral (nº 428); para isso cumpre notar as grandezas directa e inversamente proporcionaes á grandeza, de que se busca o novo valor; as grandezas que se achão affectadas da lettra *d* são proporcionaes, e as da lettra *i* inversamente proporcionaes á grandeza principal.

Applicando a regra, temos:

$$\frac{x}{36} = \frac{\frac{75}{60} \times \frac{2,5}{3} \times \frac{3,2}{4} \times \frac{7}{6}}{\frac{12}{10} \times \frac{18}{25} \times \frac{4}{5}},$$

donde se deduz:

$$x = \frac{36 \times 10 \times 25 \times 75 \times 2,5 \times 3,2 \times 7 \times 5}{12 \times 18 \times 60 \times 3 \times 4 \times 6 \times 4},$$

resultado que obtivemos pelos dous methodos precedentes.

EXERCICIOS.

I. *Certa obra foi feita por 10 obreiros em 15 dias. — Quantos dias serão necessarios a 9 obreiros para fazerem a mesma obra?*

II. *Pagou-se certa somma pelo transporte de 27 quintaes a uma distancia de 16 leguas $\frac{2}{3}$. Quantos quintaes se poderão transportar pela mesma somma a uma distancia de 37 leguas $\frac{1}{2}$?*

III. *Durante certo tempo 40 obreiros fizerão 268 toezas de obra. Quantas toezas farão no mesmo tempo 60 obreiros de mesma força?*

IV. *Para se fazerem os $\frac{3}{8}$ de certa obra é necessario 1 dia. — Que tempo será necessario para fazer-se toda a obra?*

V. *A razão das forças de dous obreiros é $\frac{2}{3}$, e a das difficuldades dos terrenos, em que trabalhão, $\frac{3}{4}$. O primeiro d'elles faz 288 toezas em 36 horas, quantas toezas fará o segundo em 24 horas no segundo terreno?*

VI. *Uma grandeza proporcional a muitas outras, é tambem proporcional á seo producto.*

VII. *Em 28 dias, 26 obreiros trabalhando $8^h\frac{1}{4}$ por dia, fizerão $428^m,67$ de certa obra, cuja difficuldade é representada pela fracção $\frac{3}{4}$. Quantos obreiros serião necessarios, trabalhando $9^h\frac{1}{5}$ por dia, para fazerem em 45 dias $427^m,73$ de uma obra, cuja difficuldade fosse representada por $\frac{5}{7}$; sabendo-se que a razão das actividades das duas companhias é $\frac{15}{16}$.*

VIII. *Demonstra-se na Physica que o numero de vibrações transversaes que executa na unidade de tempo uma corda tesa, é proporcional á raiz quádrada do peso que a entesa, e inversamente proporcional a seo comprimento, a seo diametro e á raiz quadrada de sua densidade.*

Posto isto, uma corda de cobre tendo $0^m,363$ de comprimento, $0^m,0015$ de diametro, e sendo entesada por um peso de $13^{kg}35$, executa 1999 vibrações em um segundo; pergunta-se quantas vibrações executará uma corda de platina tendo $0^m,451$ de comprimento, 0^m00025 de diametro, e sendo entesada por um peso de $4^{kg},49$; a densidade da platina sendo 21,5 e a do cobre 8,8.

IX. *Tres grandezas variaveis* A, B, C *dependem uma da outra; sabe-se que* A *é proporcional a* B, *quando* C *não varia, e* A *proporcional a* C, *quando* B *não varia. Pergunta-se como varião* B *e* C, *quando* A *não varia.*

X. *A terceira lei de* KEPLER *é a seguinte:* OS QUADRADOS DOS TEMPOS DAS REVOLUÇÕES SIDERAES DOS PLANETAS SÃO PROPORCIONAES AOS CUBOS DE SUAS DISTANCIAS MEDIAS AO SOL.

Posto isto, executando a terra sua revolução sideral em

365,25 *dias, e sua distancia ao sol sendo tomada por unidade, pergunta-se qual a distancia media de Venus que executa em* 224,70 *dias sua revolução sideral.*

CAPITULO II.

SOLUÇÕES DE DIVERSAS QUESTÕES SOBRE AS GRANDEZAS CONCRETAS.

Regra de juros e desconto.

430. Logo que uma pessoa empresta dinheiro á outra durante certo tempo, esta ultima segundo o uso restitue não somente o emprestimo como outra quantia, que se chama *juro* do dinheiro emprestado, que é, por assim dizer, o alluguel do dinheiro.

O juro depende da somma que se empresta, do tempo que dura o emprestimo e de um terceiro elemento, que se chama *taxa* do juro, que vem a ser o beneficio que produz uma quantia determinada em tempo determinado, ordinariamente é o juro de 100 em um anno ; se 5 é esse juro, diz-se que a taxa é *cinco por cento*, que se escreve abreviadamente : 5 %.

A taxa varía de um paiz a outro, e mesmo com o tempo em um mesmo paiz.

431. O juro é *simples* logo que a quantia emprestada é sempre a mesma cada anno durante todo o tempo do emprestimo ; o juro é *composto*, logo que no fim de cada anno o juro se ajunta ao capital para produzir juros no anno seguinte.

432. Regra de juros é toda questão relativa ao beneficio que produz uma somma de dinheiro, que se emprega em especulações commerciaes, industriaes, etc., ou que se em-

presta a alguem, que então indemniza o emprestador, pagando-lhe juros.

JURO SIMPLES.

433. Em toda questão de juro simples entrão sempre quatro quantidades : *o capital, o tempo, a taxa, e o juro.* É claro que o juro é proporcional ao capital, ao tempo e á taxa ; vê-se pois que as questões de juro não são mais do que regras de tres simples e composta.

Quatro problemas principaes se appresentão, a saber :

I. Determinar o juro que pode produzir certa quantia dada, empregada durante certo tempo dado, conhecendo-se a taxa do juro.

II. Determinar o capital, que é necessario empregar-se durante certo tempo dado para vencer um juro dado.

III. Calcular a taxa do juro a que se deve empregar por um tempo dado, um capital dado para produzir um juro dado n'esse tempo.

IV. Calcular o tempo, em que um capital dado a uma taxa dada deve vencer um juro dado.

434. Estes quatro problemas se resolvem mui facilmente por meio de uma formula ou relação constante que existe entre as quatro quantidades, que entrão em toda questão de juro, relação que nos propomos a determinar.

Sejão a o capital, t o tempo, i a taxa, I o juro do capital a, empregado pelo tempo t á taxa i.

Eis o raciocinio.

	100	produz	i	em	1 anno
	1	»	$\frac{i}{100}$	»	»
	a	»	$\frac{i \times a}{100}$	»	»
emfim	»	»	$\frac{i \times a \times t}{100}$	»	t annos.

Ora, chamamos I o juro de a, ou o que produz o capital a em t annos ; logo, temos :

$$I = \frac{a \times i \times t}{100} \qquad (1)$$

435. O primeiro problema é resolvido, empregando-se a formula (1) ; para resolver os outros, vamos fazer algumas transformações simples ; multiplicando os dous membros da igualdade (1) por 100, temos :

$$I \times 100 = a \times i \times t \ ;$$

d'onde se deduz successivamente

$$a = \frac{I \times 100}{i \times t} \ (2), \ i = \frac{I \times 100}{a \times t} \ (3), \ t = \frac{I \times 100}{a \times i} \ (4) .$$

436. Façamos algumas applicações d'estas formulas.

PROBLEMA I. *Calcular o juro de 432 : 400 reis em 3 annos 6 mezes a 6 por cento ao anno.*

A quantidade desconhecida n'esta questão é o juro ; applicando a formula (1), e notando que t n'essa formula, assim como nas outras, designa o tempo, *expresso em annos*, temos :

$$I = \frac{432400 \times 6 \times \frac{7}{2}}{100} = \frac{432400 \times 6 \times 7}{200} = 90 : 804 \text{ reis} ;$$

a fracção $\frac{7}{2}$ do anno sendo equivalente a 3 annos e 6 mezes.

PROBLEMA II. *Determinar o capital que empregado por 3 annos e 6 mezes a 6 por cento ao anno, produzio 90 : 804 reis de juro.*

A incognita d'esta problema é o capital, empregando pois a formula (2), temos :

$$a = \frac{90804 \times 100}{6 \times \frac{7}{2}} = \frac{90804 \times 100 \times 2}{6 \times 7} = 432 : 400$$

resolve todas as questões que se podem appresentar; a letra E designa o desconto por fôra.

440. Passemos ao desconto por dentro, e resolvamos o problema de uma maneira geral.

Problema. *Calcular o desconto por dentro* e *de uma somma* a, *importancia de um bilhete pagavel no fim de* t *annos, a taxa do desconto sendo* i.

Eis o raciocinio :

100	em 1 anno	produz	i
100	em t annos	prod.	$i \times t$;

por conseguinte, um bilhete, cujo valor nominal é $100 + i \times t$, pagavel no fim de t annos, vale hoje 100; e o desconto por dentro d'esse bilhete é $i \times t$; logo, se

sobre $100 + i \times t$ o desconto por dentro é $i \times t$.

sobre 1 o desconto por dentro será $\frac{i \times t}{100 \times i \times t}$,

e sobre a o desconto por dentro será $\frac{a \times i \times t}{100 + i \times t}$;

assim a formula pedida é

$$= \frac{a \times i \times t}{100 + i \times t} \qquad (2)$$

Comparando as duas formulas vê-se que o desconto por dentro é menor que o desconto por fôra, por isso que o denominador da fracção (2) é maior que o denominador da fracção (1).

441. O valor real do bilhete se obtem diminuindo-se do valor nominal o desconto por dentro : pode-se tambem chegar a esse valor por meio de uma proporção, sem ter-se necessidade de calcular o desconto ; com effeito, conservando-se as mesmas annotações e repetindo-se os raciocinios, que fizemos, vê-se que, por isso que um bilhete, cujo valor nominal é $100 + i \times t$, vale hoje 100, a questão que nos propomos tem por fim

determinar o que vale hoje um bilhete ou qual o seo valor real x, sendo a seo valor nominal, e d'ahi a proporção :

$$\frac{x}{100}=\frac{a}{100+i\times t},$$

d'onde se deduz :

$$x=\frac{100\times a}{100+i\times t}$$

Reciprocamente conhecendo-se o valor real de um bilhete será facil obter-se o desconto por dentro, por isso que este é a differença entre seo valor nominal e seo valor real ; com effeito

$$e=a-\frac{100\times a}{100+i\times t}=\frac{100\times a+a\times i\times t-100\times a}{100+i\times t}=$$

$$=\frac{a\times i\times t}{100+i\times t}.$$

442. Afim de bem comprehender-se o que dissemos, façamos algumas applicações repetindo os raciocinios.

PROBLEMA. *Calcular o desconto por dentro de* 432 : 200 *reis, importancia de um bilhete a vencer-se no fim de* 2 *annos e* 5 *mezes, a taxa do desconto sendo* 5 *por cento.*

Eis o raciocinio :

100	em 1 anno .	produz	5
100	em $\frac{29}{12}$ do anno	produz	$5\times\frac{29}{12}$;

logo ; um bilhete de

$100+5\times\frac{29}{12}$, pagavel no fim de $\frac{29}{12}$ do anno, vale hoje 100,

e o desconto por dentro d'esse bilhete é $5 \times \frac{29}{12}$; por conseguinte, se

sobre $100 + 5 \times \frac{29}{12}$ o desconto é $5 \times \frac{29}{12}$

sobre 1 o desconto será $\dfrac{5 \times \frac{29}{12}}{100 + 5 \times \frac{29}{12}}$

e sobre 432 : 200 o desconto será $\dfrac{5 \times \frac{29}{12} \times 432200}{100 + 5 \times \frac{29}{12}}$

resultado a que chegariamos se applicassemos immediatamente a formula (2) ; não ha mais do que calcular a expressão do desconto, operando achamos

$$e = 46 : 594 .$$

A differença :

$$432 : 200 - 46 : 594 = 385 : 606 ,$$

entre o valor nominal e o desconto do bilhete é o valor actual, ou a somma que recebe do banqueiro o portador do bilhete ou da lettra.

Pode-se ainda calcular o valor actual por meio da proporção, como fizemos geralmente.

Se um bilhete de $100 + 5 \times \frac{29}{12}$, pagavel no fim de $\frac{29}{12}$ do anno, vale hoje 100, qual o valor actual de um bilhete cuja importancia é de 432 : 200 reis, pagavel no mesmo tempo ; d'ahi a proporção :

$$\frac{x}{100} = \frac{432200}{100 + 5 \times \frac{29}{12}} ,$$

donde se deduz :

$$x = \frac{43220000 \times 12}{1200 + 5 \times 29} = 385 : 606 \text{ reis.}$$

JURO COMPOSTO.

443. Problema I. *Calcular a quantia final* A, *produzida por uma somma* a, *posta a juro composto durante* n *annos, a taxa do juro sendo* r .

Ordinariamente, no juro composto, r ou a taxa é o juro de 1 em um anno.

Eis o raciocinio :

1	em 1 anno	produz	r
a	em 1 anno	produz	$r \times a$;

por conseguinte o capital com o juro vem a ser no fim do primeiro anno

$$a + a \times r = a \times (1 + r) ,$$

quantia que é o novo capital no segundo anno ; repetindo o raciocinio precedente :

1	em 1 anno	produz	r
$a \times (1 + r)$	em 1 anno	produz	$a \times r \times (1 + r)$,

por conseguinte no fim do segundo temos a somma :

$$a \times (1 + r) + a \times r \times (1 + r) = a \times (1 + r) \times (1 + r) =$$
$$= a \times (1 + r)^2 ;$$

no fim do terceiro anno temos $a \times (1 + r)^3$, e no fim de n annos, $a \times (1 + r)^n$; logo,

$$A = a \times (1 + r)^n \qquad (1)$$

444. Esta formula contém quatro quantidades; tres sendo dadas, pode-se sempre determinar a quarta; quatro problemas principaes se appresentão.

I. Determina-se A, tomando-se os logarithmos dos dous membros da igualdade (1),

$$\log. A = \log. a + n \times \log. (1 + r) \qquad (2)$$

II. Determina-se a, deduzindo-se da ultima igualdade,

$$\log. a = \log. A - n \times \log. (1 + r) \qquad (3)$$

III. Determina-se r, calculando-se $(1 + r)$ por meio da formula

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. A - \log. a}{n},$$

deduzida da igualdade (2).

IV. Determina-se n por meio da formula

$$n = \frac{\log. A - \log. a}{\log. (1 + r)}$$

deduzida da igualdade (2).

445. Problema II. *Calcular a somma que, posta a juro composto durante* n *annos, produz outra somma* B.

x sendo a somma buscada, é claro que temos:

$$x \times (1 + r)^n = B,$$

donde se deduz:

$$x = \frac{B}{(1 + r)^n}.$$

Annuidade.

446. PROBLEMA I. *Uma quantia* a *é empregada cada anno a juro composto, durante* n *annos,* r *sendo a taxa do juro. Pergunta-se o valor total* A *de todas essas sommas no fim dos* n *annos.*

O valor final da primeira somma empregada por n annos é $a \times (1+r)^n$: o valor da segunda empregada por $(n-1)$ annos é $a \times (1+r)^{n-1}$, e assim por diante ; o valor da penultima somma empregada por 2 annos é $a \times (1+r)^2$, e o valor da ultima é $a \times (1+r)$, por isso que esta é somente empregada durante um anno.

A questão tem por fim buscar a somma :

$$a \times (1+r) + a \times (1+r)^2 + a \times (1+r)^3 + \ldots + a \times (1+r)^n ;$$

notando que é a somma de uma progressão geometrica crescente, cuja razão é $(1+r)$, temos

$$A = \frac{a \times (1+r)^{n+1} - a \times (1+r)}{r} = \frac{a \times (1+r) \left[(1+r)^n - 1\right]}{r}.$$

447. *Observação.* Para submetter-se esta formula ao calculo logarithmico cumpre calcular primeiramente o parenthesis, o que se faz determinando-se por meio dos logarithmos o valor de $(1+r)^n$, e diminuindo-se d'esse valor a unidade ; feito isto, nada é mais facil do que applicar os logarithmos á aquella formula.

EXEMPLO. Sejá 1 : 000 : 000 reis a somma que se emprega cada anno durante 20 annos, a taxa sendo 5 %.

Na nossa formula r ou a taxa sendo o juro de 1, vale na questão proposta 0,05 ; introduzindo os valores na formula, temos :

$$A = \frac{1000000 \times 1,05 \times [(1,05)^{20} - 1]}{0,05} = 21000000 \times [(1,05)^{20} -$$

e tomando os logarithmos

$$\log. A = \log. 21000000 + \log. [(1,05)^{20} - 1]$$

Calculo do parenthesis.	*Calculo de* A
log. 1,05 = ... 0,0211893	log. 21000000 = ... 7,3222193
20 × log. 1,05 = ... 0,4237860	log. 1,6533 = ... 0,2183517
$(1,05)^{20} = 2,6533$	log. A = ... 7,5405710
e $(1,05)^{20} - 1 = 1,6533$	e A = 34 : 759 : 300

448 PROBLEMA II. *Calcular a somma que seria necessario pagar annualmente durante* n *annos para saldar uma divida* A, *o primeiro pagamento sendo feito no fim de um anno e* r *sendo a taxa.*

Seja x a somma buscada; supponhamos que se ajustem as contas no fim do ultimo anno, tempo em que a divida ou somma emprestada A tornou-se $A(1+r)^n$; o primeiro pagamento x feito no fim do primeiro anno vale no momento do ajuste de contas $x \times (1+r)^{n-1}$, o segundo empregado por $(n-2)$ annos vale no mesmo momento $x \times (1+r)^{n-2}$, e assim successivamente; o penultimo empregado por um anno vale no fim do ultimo anno $x \times (1+r)$, e o ultimo, feito no momento do ajuste, fica o mesmo, x. Assim a somma total dos pagamentos annuaes feitos durante os n annos é no fim do ultimo anno

$$x + x \times (1+r) + x \times (1+r)^2 + \ldots\ldots + x \times (1+r)^{n-1},$$

somma de uma progressão geometrica, cuja razão é $(1+r)$; applicando a formula e notando que essa somma deve ser equivalente á importancia da divida no fim do ultimo anno, temos:

$$x \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} = A(1+r)^n,$$

d'onde se deduz :

$$x = \frac{A \times r \times (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Esta formula não é immediatemente calculavel por logarithmos ; cumpre operar, como fizemos precedentemente.

Divisões proporcionaes.

449. Chamão-se numeros proporcionaes a numeros dados, numeros, cujas razões respectivas aos numeros dados são iguaes. Assim para exprimir que os numeros x, y, z são proporcionaes a a, b, c, bastara pôr :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

450. Dividir um numero ou em geral uma grandeza em partes proporcionaes a outros numeros dados é dividir esse numero ou essa grandeza em tantas partes, quantos são os numeros proporcionaes, e taes que as razões d'essas partes aos numeros correspondentes sejão iguaes.

451. Problema geral. Dividir um numero N em n partes proporcionaes aos numeros a, b, c, ... k.

Sejão x, y, z, ... u as partes buscadas ; em virtude da definição, temos :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots\ldots \frac{u}{k};$$

applicando o theorema nº 198, notando que

$$x + y + z + \ldots\ldots + u = N$$

e pondo

$$a + b + c + \ldots\ldots + k = S$$

temos

$$\left.\begin{array}{rl} \dfrac{N}{a+b+c+\ldots+k}=\dfrac{x}{a} & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x=a\times\dfrac{N}{S} \\ \text{»} \qquad =\dfrac{y}{b} & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y=b\times\dfrac{N}{S} \\ \text{»} \qquad =\dfrac{z}{c} & \text{d'onde se deduz: } z=c\times\dfrac{N}{S} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{»} \qquad =\dfrac{u}{k} & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u=k\times\dfrac{N}{S} \end{array}\right.$$

452. REGRA. *Obtem-se cada parte buscada multiplicando-se o numero proporcional, que lhe corresponde, pela razão constante do numero, que se quer dividir, á somma dos numeros proporcionaes.*

EXEMPLO I. *Dividir* 1500 *em partes proporcionaes a* 2, 3, 7, 8. Chamando x, y, z, u as partes buscadas, e applicando a regra (nº 452), temos :

$$\left.\begin{array}{l} x=2\times\dfrac{1500}{2+3+7+8}=150 \\ y=3\times\dfrac{1500}{2+3+7+8}=225 \\ z=7\times\dfrac{1500}{2+3+7+8}=525 \\ u=8\times\dfrac{1500}{2+3+7+8}=600 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Verificação :} \\ \\ \text{somma das partes}=1500. \end{array}$$

EXEMPLO II. *Dividir o numero* 3600 *em partes proporcionaes ás fracções* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$.

Dividir o numero dado em partes proporcionaes ás fracções dadas é o mesmo que dividir esse numero em partes proporcionaes ás fracções $\frac{24}{36}, \frac{27}{36}, \frac{30}{36}, \frac{16}{36}$, que são as propostas reduzidas ao menor denominador commum; ou ainda, o mesmo que dividir o numero dado em partes proporcionaes aos numeradores 24, 27, 30, 16; entramos assim no caso já examinado.

453. *Observação.* Ha outro methodo para chegar-se á regra das divisões proporcionaes —, pela reducção a unidade — methodo conhecido, que não expômos, porque é realmente muito simples; o leitor poderá facilmente desenvolvel-o.

Regra de sociedade.

454. A regra de sociedade tem por fim dividir um beneficio ou perda entre muitos socios relativamente aos direitos de cada um.

455. Ha tres principios, que vamos citar e que são a base d'esta regra; o ultimo é uma consequencia dos dous primeiros, como veremos.

I. *As entradas sendo differentes e os tempos iguaes, os beneficios ou perdas são proporcionaes ás entradas.*

II. *As entradas sendo iguaes e os tempos differentes, os beneficios ou perdas são proporcionaes aos tempos.*

III. *Quando as entradas e os tempos são differentes, os beneficios ou perdas são proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos.*

Para mostrar que este ultimo principio é verdadeiro, seja

x, a, t o beneficio, a entrada e o tempo de um socio
y, a, t o beneficio, a entrada e o tempo de outro socio
z, a, t o beneficio, a entrada e o tempo de um socio ficticio.

Comparando successivamente as partes x e y com a parte z do socio ficticio, temos em consequencia dos dous primeiros principios :

$$\frac{x}{z}=\frac{t}{t_1} \quad \text{e} \quad \frac{z}{y}=\frac{a}{a_1},$$

e multiplicando essas igualdades membro a membro :

$$\frac{x}{y}=\frac{a \times t}{a_1 \times t_1},$$

o que era necessario demonstrar.

456. Estes principios tendo sido expostos, a regra de sociedade não é mais do que uma applicação immediata da regra das divisões proporcionaes ; no entretanto, vamos sempre resolver uma questão, relativa ao caso mais geral.

PROBLEMA. *Tres socios tiverão um beneficio de* 3 : 700 : 000 *reis ; o primeiro empregou na empreza* 4 : 000 : 000 *reis durante* 5 *mezes, o segundo* 3 : 000 : 000 *durante* 4 *mezes, o terceiro* 6 : 000 : 000 *durante* 7 *mezes. Qual a parte de cada um ?*

Como as entradas e os tempos são differentes, os beneficios são proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos ; por conseguinte, a questão tem por fim dividir o numero 3 : 700 : 000 em partes proporcionaes aos numeros

$$4000000 \times 5, \quad 3000000 \times 4, \quad 600000 \times 7$$

ou aos numeros

$$20 \qquad 12 \qquad 42,$$

ou melhor anida aos numeros

$$10 \qquad 6 \qquad 21,$$

operação, em que não ha difficuldade alguma.

Regra de liga.

457. Distinguem-se duas questões principaes na regra de liga :

I. Dadas as quantidades de muitas substancias e os preços da unidade de cada uma d'ellas, determinar o valor da unidade do mixto.

II. Dados os valores da unidade de muitas substancias e a do mixto, determinar as quantidades d'essas substancias, que entrão no mixto.

PRIMEIRO CASO.

458. Problema I. *Misturarão-se 60 frascos de vinho a 1000 reis, 20 a 1200, 50 a 1500 e 30 a 1800. Qual o preço de um frasco do mixto?*

Solução.

60 frascos a 1000 reis custão	$1000 \times 60 = 60:000$ reis
20 . . . . . 1200	$1200 \times 20 = 24:000$ »
50 . . . . . 1500	$1500 \times 50 = 75:000$ »
30 . . . . . 1800	$1800 \times 30 = 54:000$ »
160 frascos do mixto custão	213 : 000 reis ;

logo,

$$1 \text{ frasco do mixto custará } \frac{213:000}{160} = 1331,25 \text{ reis.}$$

Em geral sendo m, m', m'' .... differentes unidades (de peso ou capacidade) de varias substancias e p, p', p'' .... os preços

respectivos da unidade de medida, será facil ver-se, repetindo-se o raciocinio supra, que o preço x da unidade do mixto será

$$x = \frac{m \times p + m' \times p' + m'' \times p'' + \ldots\ldots}{p + p' + p'' + \ldots\ldots}.$$

Problema II. *Fundirão-se juntamente 2 marcos de ouro de 20 quilates, 3 marcos de 22 e 5 marcos de 23; pergunta-se o numero de quilates da liga.*

Solução. É facil vêr-se pela definição do quilate que

em 2 marcos de 20 quilates entra $\frac{2 \times 20}{24}$ de ouro puro

. . 3 . . . . 22 . . . . $\frac{3 \times 22}{24}$ . . . .

. . 5 . . . . 23 . . . . $\frac{5 \times 23}{24}$ . . . . ;

por conseguinte,

em 10 marcos da liga entrará $\frac{2 \times 20}{24} + \frac{3 \times 22}{24} + \frac{5 \times 23}{24} =$

$$= \frac{2 \times 20 + 3 \times 22 + 5 \times 23}{24} = \frac{221}{24} \text{ de ouro puro}$$

e em 1 entrará $\frac{22{,}1}{24}$ de ouro puro;

em seguida o ouro da liga é de 22,1 quilates; isto é, 22 quilates e 3 oitavas pouco mais ou menos.

Em geral sendo p, p', p'', ... os preços de differentes barras de um metal fino e q, q', q'', ... seos quilates respectivos, a quantidade x de metal puro contido na liga será

$$x = \frac{p \times q + p' \times q' + p'' \times q'' + \ldots\ldots}{24},$$

em seguida o numero y dos quilates da liga será

$$y=\frac{p\times q+p'\times q'+p''\times q''+\ldots\ldots}{p+p'+p''+\ldots\ldots}.$$

SEGUNDO CASO.

459. N'esta segunda parte da regra de liga só consideraremos duas substancias, porque o problema é indeterminado, logo que se considera maior numero ; a Algebra conduz facilmente á solução d'esses problemas.

PROBLEMA I. *Qual a rasão em que se devem misturar dous vinhos, que custão* 900 *reis e* 1600 *reis o frasco, para que o preço do mixto custe* 1200 *reis?*

Solução. Representemos por x e y o numero de frascos que se devem tomar de um e outro vinho.

Se o vinho que custa 900 reis, fosse vendido a 1200 reis, ganhar-se-hia 300 reis sobre cada frasco, e sobre x frascos, $300\times x$; porém, se o que custa 1600 reis o frasco fosse vendido a 1200, perder-se-hia em cada frasco 400 reis, e em y frascos, $400\times y$; ora, como deve haver compensação entre a perda e o ganho, é preciso que

$$300\times x=400\times y\ ,$$

ou

$$3\times x=4\times y\ ,$$

d'onde

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}\ ;$$

a rasão pedida é $\frac{4}{3}$; isto é, devem-se misturar 4 frascos do vinho a 900 reis com 3 frascos a 1600 reis.

PROBLEMA II. *Quanto deve-se tomar de ouro de* 22 *quilates e de ouro de* 15 *quilates, para que o ouro da liga seja de* 18 *quilates?*

Solução. Sejão x e y os dous numeros de marcos que se devem tomar de um e outro ouro.

Cada marco do ouro de 22 quilates tendo $\frac{22^{\text{mar.}}}{24}$ de ouro puro, contém $\frac{22}{24}-\frac{18}{24}$ ou $\frac{4^{\text{mar.}}}{24}$ de ouro puro mais do que não é necessario, para que o ouro da liga seja de 18 quilates; logo, x marcos do mesmo ouro contém, $\frac{4}{24}\times x$.

Raciocinando do mesmo modo veriamos que a y marcos da segunda barra faltão $\left(\frac{18}{24}-\frac{15}{24}\right)\times y$ ou $\frac{3^{\text{mar.}}}{24}\times y$ de ouro puro, para que 18 seja o numero de quilates da liga.

Ora, como deve haver compensação, temos :

$$\frac{4}{24}\times x=\frac{3}{24}\times y \quad \text{ou} \quad 4\times x=3\times y \ ,$$

d'onde :
$$\frac{x}{y}=\frac{3}{4};$$

$\frac{3}{4}$ é a razão pedida; isto é, devem-se tomar 3 marcos do ouro de 22 quilates e 5 do de 15.

460. Resolvamos ainda o seguinte problema, que appresenta mais alguma complicação.

Problema III. *Um ourives tem á sua disposição duas especies de ouro, uma de* 22 *quilates, outra de* 17 ; *quanto deve tomar de cada uma para obter* 8 *marcos de liga, de* 20,5 *quilates.*

Solução. O problema precedente fornece a razão dos pesos que se acha facilmente ser $\frac{7}{3}$; o resto do problema consiste em dividir 8 em partes proporcionaes a 3 e 7. Applicando a regra (nº 452), achamos que devem-se tomar 2,4 marcos do ouro de 17 quilates, e 5,6 marcos do ouro de 22 quilates.

EXERCICIOS.

I. *Calcular o juro simples do capital* 567 : 470 *reis a* 5 $\frac{1}{2}$ *por* $\frac{0}{0}$ *ao anno, empregado durante* 5 *annos* 5 *mezes e* 13 *dias.*

II. *Qual a taxa a que se deve empregar o capital* 674 : 500 *reis para vencer* 180 : 000 *reis no fim de* 7 *annos e* $\frac{1}{5}$?

III. *Qual o tempo em que o capital* 760 : 400 *reis, ao juro de* 4 $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{0}{0}$, *deve vencer a somma* 155 : 600 *reis?*

IV. *Que capital é necessario empegar a* 6, 7 $\frac{0}{0}$ *durante* 5,764 *annos para vencer* 560, 500 *reis de juro simples?*

V. *Qual o valor do capital* 860 : 000 *reis, empregado durante* 5 *annos a* 5 $\frac{0}{0}$, *no fim do quinto anno?*

VI. *Durante quantos annos é necessario empregar o capital* 450 : 600 *a* 4,5 $\frac{0}{0}$ *para que valha no fim do ultimo anno* 750 : 400 *reis?*

VII. *A que taxa deve-se empregar o capital* 750 : 300 *reis a* 5 $\frac{1}{3}$ *or* $\frac{0}{0}$ *para que valha no fim de* 72 *dias* 930 : 400 *reis?*

VIII. *Durante quantos dias deve-se empregar o capital* 435 : 400 *reis a* 3, 5 $\frac{0}{0}$ *para que valha no fim do ultimo dia* 500 : 500 *reis?*

IX. *Calcular o desconto por fóra e o valor actual de um bilhete de* 562 : 340 *reis, a vencer-se no fim de* 3 *annos* 7 *mezes,* 5 $\frac{0}{0}$ *sendo a taxa do desconto.*

X. *Um bilhete de* 400 : 600, *pagavel no fim de* 2 *annos e* 5 *mezes, deo lugar a um desconto de* 140 : 400 *reis, pergunta-se a taxa do desconto.*

XI. *Demonstrar, partindo da formula* (nº 441), *que o desconto por dentro não é mais do que o juro simples do valor actual do bilhete.*

XII. *Calcular o desconto por dentro e o valor actual de um bilhete de* 946 : 500 *pagavel no fim de* 3 *annos* 4 *mezes, sendo* 4 $\frac{3}{4}$ *a taxa do desconto.*

XIII. *Calcular o juro composto de um capital de* 450 : 000 *reis a* 5 $\frac{0}{0}$, *empregado durante* 3 *annos e* $\frac{1}{3}$.

XIV. *Que capital deve-se empregar a* 3 $\frac{0}{0}$ *e a juro composto, para que valha* 1 : 000 : 000 *reis no fim de* 4 *annos ?*

XV. *A que taxa deve-se empregar a juro composto um capital de* 300 : 000 *reis, para que no fim de* 4 *annos valha* 600 : 000 *reis ?*

XVI. *Durante quantos annos deve-se empregar um capital de* 360 : 000 *a* 5 $\frac{0}{0}$ *e a juro composto para obter-se* 720 : 000 ?

XVII. *Quanto valerá no fim de* 10 *annos um capital de* 565 : 400 , *empregado a juro composto a* 3 $\frac{0}{0}$?

XVIII. *Durante quanto tempo deve-se empregar a juro composto e a* 5 $\frac{0}{0}$ *um capital de* 360 : 000 *reis, para produzir a mesma somma que um capital de* 500 : 000 *reis empregado durante* 12 *annos e a* 4 $\frac{0}{0}$?

XIX. *Qual o capital que empregado a* 4 $\frac{0}{0}$ *e a juro composto vale no fim de* 15 *annos tanto quanto vale outro capital de* 450 : 000 *reis a* 6 $\frac{0}{0}$ *no fim de* 9 *annos ?*

XX. *Qual é a annuidade que pode amortizar no fim de* 7 *annos uma divida de* 538 : 700 *reis, sendo a taxa* 4 $\frac{1}{2}$ *por* $\frac{0}{0}$?

XXI. *No fim de que tempo um capital empregado a juro composto a* 5 $\frac{0}{0}$ *virá a ser o dobro ?*

XXII. *Duranto quantos annos deve-se pagar uma annuidade* 150 : 000 *reis para amortizar uma divida de* 1 : 141 : 330 *reis,* 3 $\frac{1}{2}$ *sendo a taxa do juro.*

XXIII. *Um individuo saldou uma divida pagando durante* 3 *annos uma annuidade de* 843 : 648 *reis no fim de cada anno, a taxa do juro sendo* 4 $\frac{0}{0}$; *pergunta-se o valor do capital emprestado.*

XXIV. *Dividir* 360 *em partes proporcionaes ás fracções* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

XXV. *Dividir* 540 *em tres partes taes que a primeira esteja para a segunda como* 2 *para* 3, *a segunda para a terceira como* 4 *para* 5.

XXVI. *Dividir* 720 *em tres partes taes que a primeira seja os* $\frac{3}{4}$ *da segunda, e a segunda os* $\frac{4}{5}$ *da terceira.*

XXVII. *Um numero* a *foi dividido em quatro partes propor-*

cionaes aos numeros 10, 12, 15, 18, *sabe-se mais que a somma das duas outras é* 88. — *Qual é esse numero ?*

XXVIII. *Dividir o numero* 120 *em tres partes inversamente proporcionaes aos numeros* 2, $3 + \frac{1}{3}$, $4 + \frac{5}{6}$.

XXIX. *Quatro negociantes empregárão em uma empresa* 36000 *francos. Dividindo os beneficios proporcionalmente á entrada de cada um, o primeiro teve* 3000 *fr.*, *o segundo* 3500 *fr.*, *o terceiro* 2600 *fr. e o quarto* 2900. *Pergunta-se a entrada de cada um.*

XXX. *Tres obreiros trabalhando em commum ganhárão* 1800 ; *o primeiro trabalhou durante* 7 *dias e* 8 *horas por dia, o segundo* 6 *dias e* 9 *horas por dia*, *o terceiro* 8 *dias e* 7 *horas por dia. Pergunta-se a parte que tocará a cada obreiro.*

XXXI. *Um mercador de vinho tem em seo armazem* 50 *frascos de vinho a* 400 *reis,* 25 *a* 600 *reis,* 80 *a* 700 *reis e* 15 *a* 750 *reis. Misturou todas essas qualidades de vinho e quer saber quanto deve ajuntar d'agua para poder ganhar* 120 *reis em cada frasco do mixto.*

XXXII. *Deseja-se encher um casco de* 450 *frascos com vinho a* 750 *reis o frasco. Pergunta-se que quantidade d'agua e vinho deve-se tomar, para que um frasco do mixto custe* 800 *reis.*

XXXIII. *O metal dos sinos é uma liga que contem* 110 *partes d'estanho,* 390 *de cobre,* 5 *de zinco e* 4 *de chumbo. Qual a quantidade de cada um d'esses metaes que compõem um sino, cujo peso é de* 6108 *kilog.* ?

XXXIV. *Quer-se misturar vinho a* 350 *reis com vinho a* 550 *reis, para formar um mixto a* 420 *reis. Quanto deve-se tomar do segundo vinho por* 180 *frascos do primeiro ?*

XXXV. *O latão é uma liga de zinco com cobre ; o titulo do latão em relação ao cobre é* 0,7 *e em relação ao zinco* 0,3. — *O kilogrammo de cobre custa* $2^{f},70$, *e o de zinco* $0^{f},90$. — *Pergunta-se o preço de um kilogrammo de latão.*

XXXVI. *Quer-se fundir ouro de* 23 *quilates com ouro de*

20,5 *para formar ouro de* 21,8. *Quanto deve-se tomar do ouro de* 20,5 *quilates, por* 5 *marcos do segundo ?*

XXXVII. *Uma barra de prata de* 23 *quilates pesa* 20 *marcos, qual a quantidade de cobre que se deve ajuntar para obter-se ouro de* 21,5 *?*

XXXVIII. *Um mercador tem cha a* 2 : 800 *reis e a* 3 : 600 *reis a libra ; fornece a um dos seos correspondentes uma caixa com* 50 *libras, e recebe para seo pagamento* 772 : 800. *Pergunta-se quanto tinha elle de cada qualidade, sabendo-se que ganhou* 15 $\frac{0}{0}$ *em sua venda.*

XXXIX. *Tres grandezas* A, B, C *dependem uma da outra; sabe-se que A é inversamente proporcional a* B, *quando* C *não varía, e inversamente proporcional a* C, *quando* B *não varía. Pergunta-se como varião* B *e* C, *quando* A *não varía.*

XL. *Pela terceira lei de Kepler, os quadrados dos tempos das revoluções sideraes dos planetas são proporcionaes aos cubos de suas distancias medias ao sol. Executando a terra sua revolução sideral em* $365 + \frac{1}{4}$ *dias, e sua distancia ao sol sendo tomada por unidade, pergunta-se qual é o tempo da revolução sideral do planeta Neptuno ou Leverrier, cuja distancia média ao sol é expressa pelo numero* 30,04.

FIM.

Paris. — Na imprensa de W. REMQUET E Cª, rua Garancière, 5.